Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Резольвентный подход для волнового уравнения с закрепленными концами

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Деменкова Кирилла Игоревича

Руководитель

преддипломной практики

д.ф. - м.н., профессор	____________________	А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф. - м.н., профессор	____________________	А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Метод Фурье – один из важнейших математических методов.

Академик В.А.Стеклов впервые дал строгое обоснование метода Фурье, которое опирается на доказательство равномерной сходимсоти ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз.

Метод Фурье получил широкое распространение, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи в это области И.Г.Петровским, В.И.Смирновым, О.А.Ладыженской, В.А.Ильиным, В.А.Чернятиным.

Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А.Н.Крыловым. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать.

В.А. Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н.Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много новых важных вопросов и в теории функций.

В данной работе рассматривается дальнейшее развитие метода А.Н.Крылова и В.А.Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удается получить классическое решение для волнового уравнения с закрепленными концами при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

Данная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка использованных источников. Основаная часть включает в себя 5 глав:

1. Постановка задачи
2. Асимптотика собственных значений
3. Оператор преобразования
4. Преобразование формального решения
5. Формулировка результата

Основное содержание работы

В **главе 1** рассматривается задача вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{1.3}$$

Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначная, и

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{1.4}$$

Условия (1.4) на $\varphi(x)$ являются минимальными для существования классического решения. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Введем в рассотрение окружности $\gamma_n = \{\rho | |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n > n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ – образ γ_n в λ-плоскости, $\lambda = \rho^2$, $Re\rho \geq 0$. Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E – единичный оператор, λ – спектральный параметр. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (1.1)-(1.3) представимо в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos(\rho t) d\lambda + \sum_{n \geq n_0} (\varphi, \psi_n) \varphi_n(x) \cos(\rho_n t), \tag{1.5}$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения меньшие по модулю r, имеют номера меньшие n_0, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ – собственная функция оператора L для сосбвтенного значения λ_n, система $\psi_n(x)$ биортогональна системе $\varphi_n(x)$. Можем предаствить (1.5) в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos(\rho t)d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}}(R_\lambda\varphi)\cos(\rho t)d\lambda. \qquad (1.6)$$

Нашей основной задачей является доказательство того, что при сделанных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма является классическим решением поставленной задачи.

В **главе 2** рассматривается асимптотика собственных значений. В этой главе приводятся вспомогательные определения и утверждения. Они описаны в общем случае и применяютя для спектральной задачи

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Таким образом получаем асимптотику собственных значений для оператора L. Основным результатом данной главы является следующая теорема

Теорема 2.1. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеет место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho = \pi n + O(1/n), \quad n = n_0, n_0+1, \ldots.$$

В **главе 3** приводятся вспомогательные сведения о формуле Римана и операторе преобразования. Эти сведения понадобятся нам в дальнейшем, при преобразовании формального решения.

Пусть дважды непрерывная дифференцируемая функция

$$u(x,y), \quad (-\infty < x < \infty;\ 0 \leq y < \infty)$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} u''_{xx}(x,y) - q_1(x)u(x,y) = u''_{yy}(x,y) - q_2(y)u(x,y), \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u'_y(x,0) = \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Значение функции $u(x,y)$ в точке (x_0, y_0) можно считать значением некоторого линейного функционала $T_{x_0}^{y_0}$ на вектор-функции $(\varphi(x), \psi(x))$:

$$u(x_0, y_0) = T_{x_0}^{y_0}[\varphi(x), \psi(x)]. \tag{3.2}$$

Вид этого функционала впервые был найден Бернхардом Риманом следующим способом. Обозначим через $R(x,y;x_0,y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$R''_{xx} - q_1(x)R = R''_{yy} - q_2(y)R \tag{3.3}$$

в области D, где область D есть треугольник с координатами вершин (x_0, y_0), $(x_0 - y_0, 0)$, $(x_0 + y_0, 0)$, обращающееся в единицу на характеристиках $x - x_0 = \pm(y - y_0)$ этого уравнения. Умножив уравнение (3.1) на R, уравнение (3.3) – на u и вычтя затем одно из другого, получим справедливое в области D тождество

$$u''_{xx}R - uR''_{xx} = u''_{yy} - uR''_{yy}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(u'_xR - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_yR - uR'_y) = 0.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_xR - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_yR - uR'_y)\right] dxdy = 0,$$

откуда согласно формуле Грина следует

$$\int\limits_\Gamma (u'_xR - uR'_x)dy + (u'_yR - uR'_y)dx = 0, \tag{3.4}$$

где Γ – ориентированная граница области D, состоящая из трех направленных отрезков 1,2,3, так что

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{1} + \int\limits_{2} + \int\limits_{3}. \tag{3.5}$$

Вычилив интегралы на всех участках получим

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x)R(x, 0; x_0, y_0) - \varphi(x)R'_y(x, 0; x_0, y_0)\}dx. \tag{3.6}$$

Функция $R(x, y; x_0, y_0)$ называется функцией Римана, а формула (3.6) – вид функционала $T_{x_0}^{y_0}$ – формулой Римана. Для строгого обоснования формулы Римана нам еще нужно доказать, что функция Римана, обладающая перечисленными выше свойствами, существует. Переходя в уравнения (3.3) к новым переменным $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ ($\xi_0 = x_0 + y_0$, $\eta_0 = x_0 + y_0$) и предполагая

$$r(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}; x_0, y_0\right),$$

получаем для функции $r(\xi, \eta) = r(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ в области D' ($\eta_0 \leq \eta \leq \xi \leq \xi_0$) уравнение

$$4r''_{\xi\eta} - \left\{q_1\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)\right\} r = 0 \tag{3.7}$$

и следующие условия на характеристиках:

$$r(\xi_0, \eta) = r(\xi, \eta_0) = 1. \tag{3.8}$$

Проведя исследование данного уравнения и функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. Если функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ непрерывны, то любое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ задачи Коши (3.1) представимо формулой (3.6), где $R(x, y; x_0, y_0)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Теперь рассмотрим на интервале $(-a, a)$, $(a \leq \infty)$ дифференциальное уравнение Штурма-Лиувилля.

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{3.9}$$

где $q(x)$ – непрерывная на этом интервале комплекснозначная функция, а λ – комплексный параметр. Обозначим через $e_0(\lambda, x)$ решение уравнения (3.9) при начальных данных

$$e_0(\lambda, 0) = 1, \quad e_0'(\lambda, 0) = i\lambda. \tag{3.10}$$

После некоторых рассуждений получаем результаты.

Теорема 3.2. Решение $e_0(\lambda, x)$ уравнения (3.9) при начальных данных (3.10) представимо в виде:

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \tag{3.11}$$

где $K(x, t)$ – непрерывная функция.

Следствие. Решения $w(\lambda, x; h)$, $w(\lambda, x; \infty)$ уравнения (3.9) при начальных данных

$$w(\lambda, 0; h) = 1, \quad w_x(\lambda, 0; h) = h,$$

$$w(\lambda, 0; \infty) = 0, \quad w_x'(\lambda, 0; \infty) = 1.$$

можно представить в виде

$$w(\lambda, x; h) = \cos(\lambda x) + \int\limits_0^x K(x, t; h) \cos(\lambda t) dt, \tag{3.12}$$

$$w(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \int\limits_0^x K(x, t; \infty) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} dt. \tag{3.13}$$

В **главе 4** рассматривается и изучается формальное решение. Для удобства, формальное решение разбивается на слагаемые.

Лемма 4.1. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится внутри и на границе $\tilde{\gamma_n}$ ни при каком $n > n_0$. Тогда

$$\int\limits_{\tilde{\gamma_n}} (R_\lambda \varphi) \cos(\rho t) d\lambda = \int\limits_{\tilde{\gamma_n}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos(\rho t) d\lambda, \tag{4.1}$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.

Теорема 4.1. Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{4.2}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R^0_\lambda g}{\lambda - \mu_0} \cos(\rho t) d\lambda - \sum_{n>n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma_n}} \frac{R^0_\lambda g}{\lambda - \mu_0} \cos(\rho t) d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left[R_\lambda g - R^0_\lambda g\right] \cos(\rho t) d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n>n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma_n}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left[R_\lambda g - R^0_\lambda g\right] \cos(\rho t) d\lambda,$$

$R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$

Получим для $u_0(x,t)$ точную формулу.

Лемма 4.2. Имеет место соотношение

$$R^0_\lambda g = \varphi_1 + (\lambda - \mu_0) R^0_\lambda \varphi_1$$

где $\varphi = R^0_\lambda g$.

Лемма 4.3. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda^0\varphi_1)\cos(\rho t)d\lambda - \sum_{n>n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}}(R_\lambda^0\varphi_1)\cos(\rho t)d\lambda. \qquad (4.3)$$

Для дальнейшего потребуется точная формула для резольвенты R_λ. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = 0, \quad z_2(0,\rho) = 0, \quad z_2'(0,\rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x,\rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ, где $\lambda = \rho^2$.

Теорема 4.2. Для резольвенты R_λ имеет место формула

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \qquad (4.4)$$

где

$$v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}, \quad (f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx,$$

$$(M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt, \quad M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix}.$$

Лемма 4.4. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1(\xi), \sin(\pi n\xi))\sin(\pi nx)\cos(\pi nt). \qquad (4.5)$$

Следствие. Имеет место формула $u_0(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-$, где

$$\Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1(\xi), \sin(\pi n\xi))\sin(\pi n(x\pm t)).$$

Теорема 4.3. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t)), \tag{4.6}$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2(-\infty,\infty)$, нечетна, $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(2+x)$, и $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x)$ при $x \in [0,1]$.

Таким образом мы рассмотрели $u_0(x,t)$, нашли его точную формулу, доказали абсолютную и равномерную сходимость и дважды непрервыную дифференцируемость.

Теперь рассмотрим ряд $u_2(x,t)$. Он представим в виде:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=n_0}^{\infty}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]\cos(\rho t)d\lambda.$$

где v^0 и z_2^0 те же, что и ранее, но взятые для оператора L_0.

Нам потребуются некоторые факты о $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$.

Теорема 4.4. В полосе $Im(\rho) \le h$ ($h > 0$ и любое) имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x,\rho) = \cos(\rho x) + O(1/\rho), \quad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin(\rho x) + O(1),$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + O(1/\rho^2), \quad z_2'(x,\rho) = cos(\rho x) + O(1/\rho)$$

где оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Следующий результат является частным случаем следствия теоремы 3.2 из главы 3.

Теорема 4.5. Для $z_2(x,\rho)$ имеет место формула

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,t)\frac{\sin(\rho t)}{\rho}dt, \tag{4.7}$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, и $K(x,0) \equiv 0$ ($K(x,t)$ не зависит от ρ).

Лемма 4.5. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v_x^{(j)}(x,\rho) = v_x^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0,1,2.$$

Лемма 4.6. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место соотношения

$$v^{(j)}(x,\rho)(g,z_2) - v^{0(j)}(x,\rho)(g,z_2^0) = v^{0(j)}(x,\rho)(g,z_2 - z_2^0) + O(\rho^{j-1}(g,z_2)),$$

где $j = 0,1,2$.

Лемма 4.7. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$(g,z_2) = \rho^{-1}[(g_1(\xi)\cos(\mu\xi), \sin(\pi n\xi)) + (g_1(\xi)\sin(\mu\xi), \cos(\pi n\xi))], \tag{4.8}$$

$$(g,z_2 - z_2^0) = \rho^{-2}[(g_2(\xi)\cos(\mu\xi), \cos(\pi n\xi)) + (g_2(\xi)\sin(\mu\xi), \sin(\pi n\xi))], \tag{4.9}$$

где

$$\rho = \pi n + \mu, \quad \mu \in \gamma_0,$$

$$g +_(\xi) = g(\xi) + \int\limits_{\xi}^{1} K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int\limits_{\xi}^{1} K'_\xi(\tau,\xi)g(\tau)d\tau.$$

Лемма 4.8. Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos(x)$ или $\sin(x)$. Пусть $f(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\mu \in \gamma_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(\pi n x))$. Тогда верна оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{2}|\beta_n(\mu)| \le C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}, \tag{4.10}$$

где $C > 0$ и не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \gamma_0$.

В **главе 5** изложена основная идея работы. Для начала положим

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{2\rho\cos(\rho t)}{\lambda - \mu_0}[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]d\rho.$$

Рассмотрим вспомогательные леммы

Лемма 5.1. Ряды

$$\sum_{n\ge n_0} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t), \quad \sum_{n\ge n_0} a^{(j)}_{n,t^j}(x,t), \quad j=0,1,2,$$

сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$, где $T>0$ — любое фиксированное число.

Так как $u_2(x,t)=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n(x,t)$, то получаем

Лемма 5.2. Ряд $u_2(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 5.1. Ряд

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos(\rho t)d\lambda+\sum_{n\ge n_0}(\varphi,\psi_n)\varphi_n(x)\cos(\rho_n t)$$

сходится к классическому решению задачи (1.1)–(1.3) при минимальных условиях (1.4) на $\varphi(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе исследовался резольвентный подход к методу Фурье для однородного волнового уравнения с закрепленными концами. В результате удалось получить классическое решение для рассматриваемой задачи при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.