Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ "САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

«Выпуклые конусы и конические квазипорядки в векторных пространствах»

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки)__2___ курса ___227_____ группы

направления 010200 – Математика и компьютерные науки

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Беляевой Юлии Вадимовны

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доктор.ф.-м.н. профессор ________________ Розен В.В.
должность, уч. степень, уч. звание подпись,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
геометрии
доктор.ф.-м.н. профессор ___________ РОЗЕН В.В.
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016

Введение

Актуальность работы. Понятие конуса является важным обобщением понятия векторного подпространства. Оно находит приложения во многих вопросах теории оптимизации, теории игр и теории принятия решений. В общем виде теория выпуклых конусов разрабатывается в рамках выпуклого анализа[1-2].

В работе дан обзор важнейших понятий и результатов, связанных с выпуклыми конусами.

Цели и задачи. Цель данной работы - систематизация основных свойств и понятий, вводимых для выпуклых конусов. В частности, описание решетки выпуклых конусов, двойственности выпуклых конусы, конечно-порожденности выпуклых конусов и связи между выпуклыми конусами и квазипорядками.

Описание структуры работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, списка использованных источников, содержащего 10 наименований. Работа содержит 53 страницы и 10 иллюстраций.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. Часть результатов доказана самостоятельно.

В основе работы лежит произвольное векторное пространство над полем действительных чисел **R**. Некоторые свойства выпуклых конусов рассматриваются для конечномерных векторных пространств. При рассмотрении некоторых вопросов вводятся дополнительные структуры

---

[1] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.М.: Мир, 1973. С. 27-33.

[2] Розен В. В. Выпуклый анализ // Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С. 6-8.

в векторном пространстве, основными из которых являются скалярное произведение и топология. Отметим, что в конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны между собой, поэтому все нормированные топологии совпадают между собой. Такая топология называется стандартной[3]. Все топологические результаты работы доказаны для стандартной топологии.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы состоит в выявлении математической базы, лежащей в основе изучаемых в работе понятий. Из прикладных вопросов установлена связь между выпуклыми конусами и изотонными отображениями упорядоченного множества в числовую прямую, а также доказательство существования взаимно однозначное соответствие между выпуклыми конусами и коническими квазипорядками векторного пространства[4].

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказательство того, что супремум конечного числа конусов совпадает с их суммой (**Замечание II.2.2.**).
2. Доказательство конечно-порожденности выпуклого конуса, совпадающего с векторным подпространством конечной размерности (**Теорема II.4.1**.).
3. **Утверждение IV.2.** о существовании взаимно-однозначного соответствия между квазипорядками, согласованными с линейной структурой, и множеством всех выпуклых конусов векторного пространства.

---

[3] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.М.: Мир, 1973. С. 58-98.

[4] Розен В. В. Упорядоченные векторные пространства и их приложения // Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. 48 с.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В разделе «**II.1** Основные свойства выпуклых конусов» дается основное определение выпуклого конуса, как непустого подмножества K векторного пространства, удовлетворяющего двум условиям[5]:

- $K + K \subseteq K$
- $\alpha K \subseteq K$ при любом α $\geq$ 0.

Сформулированы простейшие свойства выпуклых конусов, определяются основные виды конусов. Приведены наглядные примеры различных видов конусов, например, паретовский выпуклый конус определяется равенством:

$$\mathbf{R}_{+}^{n} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0\},$$

Слейтеровский выпуклый конус задается равенством:

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0, ..., x_n > 0\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Введено понятие конической оболочки множества X в векторном пространстве, которая обозначается cone X и представляет собой наименьший выпуклый конус, содержащий X.

В разделе «**II.2** Решетка выпуклых конусов» строится решетка выпуклых конусов векторного пространства.

[5] Лейхтвейс К.. Выпуклые множества. // Москва: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1985. С. 40-58.

Операции взятия инфимума и супремума в этой решетке выражаются следующим образом:

$$\inf_{i \in I} K_i = \bigcap_{i \in I} K_i$$

$$\sup_{i \in I} K_i = cone\,(\bigcup_{i \in I} K_i)$$

Отметим, что пересечение выпуклых конусов всегда является выпуклым конусом. Но объединение выпуклых конусов не всегда является выпуклым конусом, так как нарушается определение выпуклого множества[6].

Доказано **Замечание II.2.2.** В случае двух выпуклых конусов их супремум совпадает с их суммой:

$$\sup(K_1, K_2) = K_1 + K_2\,.$$

Пусть K – произвольный конус в векторном пространстве и (-K) противоположный ему конус. Тогда верны следующие равенства:

$$\inf\{K, -K\} = K \cap (-K),$$

$$\sup\{K, -K\} = K - K\,.$$

Конус K (-K) представляет собой наибольшее векторное подпространство, содержащееся в K, а конус (K – K) представляет собой наименьшее векторное подпространство, содержащее K.

---

[6] Лейхтвейс К.. Выпуклые множества. // Москва: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1985. С. 40-65.

Выпуклый конус называется заостренным выпуклым конусом, если

$$K \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}.$$

Выпуклый конус называется воспроизводящим выпуклым конусом, если

$$K - K = V.$$

В разделе **II.3** для n-мерного пространства V_n дается определение двойственного выпуклого конуса K^*, который определяется равенством[7]:

$$K^* = \{y \in V : (\forall x \in K)(x, y) \geq 0\}$$

Установлены следующие основные свойства двойственных конусов:

- Двойственный конус всегда замкнут.
- Для любого конуса $K \subseteq V_n$ имеет место $K \subseteq K^{**}$.
- Равенство $K = K^{**}$ выполняется тогда и только тогда, когда конус K замкнут.

Доказывается следующее **Утверждение II.3.1:**

Для случая, когда выпуклый конус K является векторным подпространством, двойственный ему конус K^* совпадает с ортогональным дополнением подпространства K: $K^* = K^{\perp}$.

[7] Лейхтвейс К.. Выпуклые множества. // Москва: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1985. С. 53-65.

Приведено доказательство теоремы о размерности двойственного конуса. А именно, если K – замкнутый конус в n-мерном евклидовом пространстве V^n, тогда

$$\dim K^* = n - \dim K \cap (-K).$$

В разделе **II.4** изучаются конечно-порожденные и многогранные конусы. Конус K называется конечно-порожденным конусом, когда существует конечное подмножество X:

$$K = \text{cone } X.$$

Доказана следующая теорема о конечно-порожденном конусе:

Теорема II.4.1.

В конечномерном векторном пространстве всякое векторное подпространство является конечно-порожденным конусом.

Отметим, что в конечномерном евклидовом пространстве, снабженном нормированной топологией[8], конечно-порожденный конус всегда замкнут.

Далее в работе введено определение многогранного конуса. Многогранным (или полиэдральным) конусом называется выпуклый конус, являющийся пересечением конечного числа полупространств.

[8] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.М.: Мир, 1973. С. 66-88.

Доказывается следующий результат:

Теорема II.4.3.

В конечномерном векторном пространстве всякое собственное (отличное от V) векторное подпространство является многогранным конусом.

Важную роль играет теорема Фаркаша-Минковского-Вейля, которая формулируется следующим образом:

В конечномерном евклидовом пространстве конус тогда и только тогда является многогранным, когда он конечно порожден.

Используя теорему Фаркаша-Минковского-Вейля, получаем некоторые важные следствия:

1. Выпуклый конус, который является пересечением двух конечно-порожденных конусов, конечнопорожден.
2. Выпуклый конус, который является суммой двух многогранных конусов, является многогранным.

Следующее утверждение связывает понятие заостренного конуса и воспроизводящего выпуклого конуса:

Конечно-порожденный конус K является заостренным тогда и только тогда, когда двойственный ему конус K^* является воспроизводящим.

В разделе «**III** Конусы изотонных отображений упорядоченного множества в числовую прямую» рассматривается множество всех изотонных отображений, в ассоциированном пространстве $\mathbf{R}^A$($\mathbf{R}^A$- множество всех отображений из A в $\mathbf{R}$, где A – произвольное непустое множество, $\mathbf{R}$ - числовая прямая).

Доказано следующее утверждение:

Утверждение III.1.

Множество C(ω) всех изотонных отображений из <A, ω> в **R** образует выпуклый конус в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{R}^{A}$, состоящем из всех отображений множества A в **R**.

Важным является тот факт, что конус C(ω) изотонных отображений конечного упорядоченного множества <A, ω> в числовую прямую **R** является конечно-порожденным, а именно он порождается характеристическими функциями мажорантно стабильных в <A, ω> подмножеств, включая пустое.

В работе подробно рассмотрен пример представления функции в виде положительной линейной комбинации характеристических функций мажорантно стабильных подмножеств.

В последнем разделе «**IV.** Квазипорядки, согласованные с линейной структурой» вводится понятие квазипорядка, согласованного с линейной структурой.

Доказывается утверждение IV.2. о связи между квазипорядками векторного пространства, согласованными с его линейной структурой, и выпуклыми конусами[9].

Это утверждение показывает, что существует взаимно однозначного соответствия между множеством всех выпуклых конусов и множеством

[9] Лейхтвейс К. Выпуклые множества // Москва: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1985. С. 40-65.

всех квазипорядков на векторном пространстве, согласованных с его линейной структурой.

Квазипорядок называется коническим, если он наведен некоторым выпуклым конусом.

Квазипорядками на векторном пространстве, согласованными с его линейной структурой, являются конические квазипорядки и только они; в силу этого обстоятельства изучение квазипорядков векторного пространства сводится к изучению соответствующих им выпуклых конусов, а порядков – к заостренным выпуклым конусам.

Заключение

Выпуклые конусы играют важную роль во многих вопросах, связанных с векторными пространствами. В работе рассмотрены основные свойства выпуклых конусов в векторных пространствах, включая структуру решетки выпуклых конусов, двойственность и конечную порожденность выпуклых конусов. При этом изложение отдельных вопросов требует введения дополнительных структур в векторных пространствах, основными из которых являются скалярное произведение и топология.