Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Идеалы полугрупп частичных преобразований множества

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента_2_ курса_227_группы
направления (специальности)

02.04.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления (специальности)

профиль подготовки:
Дифференцируемые многообразия и интегрируемые системы

механико-математического факультет
наименование факультета, института, колледжа

АРХИПОВА НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Б.ПОПЛАВСКИЙ
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Отношения Грина – пять отношений эквивалентности, характеризующие полугруппы в контексте основных идеалов, которые порождаются ее элементами. Эти отношения представлены Джеймсом Александром Грином в 1951 году. Они используются при выяснении строения полугрупп[1].

Понятие полугруппы возникло в начале века, а систематические исследования полугрупп начались в конце 20-х годов. К 60-м годам теория полугрупп сформировалась в динамично развивающуюся область алгебры с богатой проблематикой и разнообразными методами и тесными связями с многими областями математики, как собственно алгебраическими (в первую очередь, с теорией групп и теорией колец), так и другими, например функциональным анализом (полугруппы операторов в банаховых пространствах), дифференциальной геометрии (полугруппы частичных преобразований), алгебраической теорией автоматов[2] (полугруппы автоматов), в графах.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является знакомство с понятиями отношений Грина (см. Клиффорд А., 1972), обзор и доказательство свойств, связанных с ними, вычисление классов Грина для полугруппы преобразований, полугруппы изотонных преобразований цепей, а также для полугруппы изотонных преобразований с убывающим порядком, состоящей из четырех элементов[3].

---

[1] Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / пер. В. А. Баранского и В. Г. Житомирского под ред. Л. Н. Шеврина. М. : МИР, 1972. С. 72–93.

[2] Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит, 1997. С. 307–325.

[3] Ким, В. И. Полугруппы изотонных преобразований частично упорядоченных множеств. М. : кандидатская диссертация. 2008. С. 8–21.

Описание структуры работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка используемых источников, содержащего 11 наименований. Объем работы составляет 50 страниц.

Краткая характеристика материалов работы. В первом разделе работы даны определения понятий, а также приведены примеры: полугрупп (см. Богомолов А. М., 1997), гомоморфизмов[4], преобразований, полугрупп преобразований[5], идеалов на полугруппах и их свойства[6], описаны бинарные отношения, отношения эквивалентности, конгруэнции.

Во втором разделе дается определение левым и правым классам Грина. Далее выражены $\mathcal{H}, \mathfrak{D}, \mathcal{J}$ отношения Грина, доказан ряд лемм и теорем, описывающих свойства этих отношений, установлена связь между $\mathcal{H}, \mathfrak{D}, \mathcal{J}$ отношениями (Ким В. И., 2008).

В третьем разделе показано $\mathfrak{D}$ – строение полной полугруппы преобразований $\mathcal{F}_X$ на множестве X. Доказана теорема о совпадении $\mathfrak{D}$ и $\mathcal{J}$ классов на $\mathcal{F}_X$. Доказана теорема, показывающая связь отношения $\mathcal{H}$ и идемпотентов полугруппы преобразований (Клиффорд А., 1972).

В четвертом разделе приведен пример полугруппы преобразований $\mathcal{F}_4$, составлена таблица отношений Грина примера (Клиффорд А., 1972) для данного, а также самостоятельно разобран пример классов Грина на полугруппе изотонных преобразований цепей (Ким В. И., 2008), выражены классы Грина полугруппы изотонных преобразований с убывающим порядком.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы заключается в проверке, изучении и усвоении классов Грина на полугруппах.

---

[4] Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / пер. И. В. Стелецкого под ред. А. Г. Куроша. М. : МИР, 1965. С. 223–257.

[5] Сушкевич, А. К. Теория обобщённых групп. Киев : Науч. исслед. изд-во Украины, 1937. С. 85–97.

[6] Ляпин, Е. С. Полугруппы. М. : Физматгиз, 1960. С. 193–239 .

Научная новизна работы заключается в применении методов вычисления структуры классов Грина на полугруппах преобразований и полугруппах изотонных преобразований для конечных множеств.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие самостоятельно полученные результаты.

1. Структура классов Грина полугруппы изотонных преобразований конечных цепей.

2. Структура классов Грина полугруппы изотонных преобразований конечных множеств с убывающим порядком.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Определение 1 (Богомолов А. М., 1997).

Полугруппа – множество элементов с введенной бинарной ассоциативной операцией:

$$(S,\cdot):\ s_1\cdot(s_2\cdot s_3) = (s_1\cdot s_2)\cdot s_3;\quad s_1, s_2, s_3 \in S.$$

Полугруппа, содержащая нейтральный элемент, называется ***моноид***:

$$\exists\, e \in S, \forall s \in S:\quad es = se = s.$$

Определение 2 (Богомолов А. М., 1997).

Идемпотент – такой элемент a, полугруппы $(S,\cdot)$, что $a\cdot a = a$, то есть повторное применение операции к объекту даёт тот же результат, что и одинарное.

Идемпотентная полугруппа – полугруппа, каждый элемент которой есть *идемпотент*.

Определение 3 (Ляпин, Е. С., 1960).

Говорят, что отношение ρ ***симметрично***, если $\rho \sqsubseteq \rho^{-1}$ (и, следовательно, $\rho = \rho^{-1}$), ***рефлексивно***, если $\rho \sqsubseteq \rho$, и ***транзитивно***, если

$$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho.$$

Отношение ρ на множестве X называется ***отношением эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 4 (Ляпин, Е. С., 1960).

Говорят, что отношение ρ на полугруппе S ***стабильно или регулярно, или однородно справа [слева]***, если a ρ b (a, b $\in$ S) влечет за собой ac ρ bc [ca ρ cb] для каждого c $\in$ S. Стабильное справа [слева] отношение эквивалентности на S будем называть ***правой [левой] конгруэнцией*** на S. ***Конгруэнцией*** на S называется отношение эквивалентности, являющееся и левой, и правой конгруэнцией.

Определение 5 (Ким, В. И., 2008).

Пусть X – произвольное непустое множество. *Преобразованием* множества X называется всякое отображение f этого множества в себя $(f : X \to X)$. Любой элемент $x \in X$ переводится преобразованием f в однозначно определенный элемент $f(x)$, называемый *образом* элемента x.

Множество всех преобразований множества X обозначим $\mathcal{F}_X$. По определению, преобразования f и g из $\mathcal{F}_X$ равны, $f = g$, если $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$. $\mathcal{F}_X$ является полугруппой относительно операции *суперпозиции*, определяемой следующим образом: *произведением* преобразований f и g называется преобразование fg, заданное условием

$$fg(x) = f(g(x))$$

для любого $x \in X$. Другими словами, fg есть результат последовательного выполнения сначала преобразования g, затем преобразования f. Легко убедиться в ассоциативности этого умножения. Полугруппу $\mathcal{F}_X$ называют ***полугруппой всех преобразований*** (а также *полной полугруппой преобразований*) на множестве X.

Определение 6 (Ляпин, Е. С., 1960).

Левым [правым] идеалом полугруппы S называется такое непустое подмножество A из S, что SA $\sqsubseteq$ A [AS $\sqsubseteq$ A].

Двусторонним идеалом или просто идеалом называется подмножество, являющееся и левым, и правым идеалом.

Определение 7 (Клиффорд А., 1972).

Определим ***отношение*** $\mathcal{L}$ на полугруппе S, полагая a $\mathcal{L}$ b тогда и только тогда, когда a и b порождают один и тот же главный левый идеал в S. Другими словами, $\mathcal{L}$ есть подмножество из S x S, состоящее из всех таких пар (a, b), что $a \cup Sa = b \cup Sb$. Последнее эквивалентно тому, что $S^1a = S^1b$, где S^1 совпадает с S, если S содержит единицу, и S^1 есть полугруппа, полученная из S присоединением единицы 1, в противном случае.

Двойственным образом определим отношение $\mathcal{R}$, полагая a $\mathcal{R}$ b тогда и только тогда, когда $aS^1 = bS^1$.

Транзитивное замыкание объединения отношений эквивалентности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ обозначается через $\mathfrak{D}$, *а* их пересечение – через $\mathcal{H}$. Очевидно, $\mathcal{H}$ – отношение эквивалентности. Будем обозначать $\mathcal{H}$-класс, содержащий a, через H_a. Ясно, что $H_a = R_a \cap L_a$.

На полугруппе S определим отношение $\mathcal{J}$, полагая a $\mathcal{J}$ b тогда и только тогда, когда $S^1a\,S^1 = S^1\,b\,S^1$, т. е. элементы a и b $\mathcal{J}$ - эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают один и тот же главный двусторонний идеал. Очевидно, что $\mathcal{J}$ – отношение эквивалентности. Так как $\mathcal{L} \sqsubseteq \mathcal{J}$ и $\mathcal{R} \sqsubseteq \mathcal{J}$, имеем $\mathfrak{D} \sqsubseteq \mathcal{J}$. Вообще говоря, $\mathfrak{D}$ *и* $\mathcal{J}$ различны, т. е. $\mathfrak{D} \neq \mathcal{J}$.

Лемма 1 (Клиффорд А., 1972).

Пусть a и b – произвольные $\mathcal{R}$-эквивалентные элементы полугруппы S, и пусть s, s' – такие элементы полугруппы S^1, что as = b и bs' = a (такие элементы s и s' существуют.) Тогда отображения $x \to xs$ ($x \in L_a$) и $y \to ys'$ ($y \in L_b$) взаимно обратны, сохраняют $\mathcal{R}$ – классы и взаимно однозначно отображают соответственно L_a на L_b и L_b на L_a [11].

Теорема 1 (Клиффорд А., 1972).

Пусть a и c – произвольные $\mathfrak{D}$ – эквивалентные элементы полугруппы S. Тогда существует такой элемент $b \in S$, что $a\mathcal{R}b$ и $b\mathcal{L}c$ и, следовательно, $as=b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ для некоторых $s, s', t, t' \in S^1$. Отображения $x \to txs$

($x \in H_a$) и $z \to t'zs'$ ($z \in H_c$) взаимно обратные и взаимно-однозначно отображают классы H_a и H_c друг на друга.

Теорема 2 (Ким, В. И., 2008).

Произведение LR любого $\mathcal{L}$-класса L и любого $\mathcal{R}$-класса R полугруппы S содержится целиком в одном $\mathfrak{D}$-классе полугруппы S.

С каждым элементом а полугруппы $\mathcal{F}_X$ связано два понятия:

1) область значений $X\alpha$ преобразования α;

2) разбиение $\pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ множества X, связанное с α, т. е. отношение эквивалентности на X, определенное следующим образом: $x\pi_\alpha y$ ($x, y \in X$), если $xa = ya$.

Пусть $\pi_\alpha^\natural$ – естественное отображение множества X на множество X/π_α классов эквивалентности множества X по mod π_α. Тогда отображение $x\pi_\alpha^\natural \to x\alpha$ является взаимно однозначным отображением множества X/π_α на X_α. Отсюда следует, что $| X/\pi_\alpha | = | X_\alpha |$. Это кардинальное число называется ***рангом*** преобразования α.

Если $y \in X$ и $\alpha \in \mathcal{F}_X$, то определим $y\alpha^{-1}$ как множество всех $x \in X$, таких, что $x\alpha = y$.

Лемма 2 (Клиффорд А., 1972).

Два элемента полугруппы $\mathcal{F}_X$ $\mathfrak{D}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же ранг.

Теорема 3 (Клиффорд А., 1972).

Пусть $\mathcal{F}_X$ – полная полугруппа преобразований на множестве X:

(i) В полугруппе $\mathcal{F}_X$ отношения $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{J}$ совпадают.

(ii) Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех главных идеалов полугруппы $\mathcal{F}_X$ и множеством всех кардинальных чисел $r \le | X |$, что главный идеал, соответствующий r, состоит из всех элементов полугруппы $\mathcal{F}_X$, ранг которых не превосходит r.

(iii) Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathfrak{D}$-классов полугруппы $\mathcal{F}_X$ и множеством всех

кардинальных чисел $r \leq |X|$, *что* $\mathfrak{D}$ *– класс* D_r, *соответствующий* r, *состоит из всех элементов полугруппы* $\mathcal{F}_X$, *ранг которых равен* r.

(iv) Пусть r *– кардинальное число* $\leq |X|$. *Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех* $\mathcal{L}$ *-классов, содержащихся в* D_r, *и множеством всех подмножеств* Y *мощности* r *из* X, *что* $\mathcal{L}$ *-класс, соответствующий множеству* Y, *состоит из всех элементов полугруппы* $\mathcal{F}_X$, *для которых* Y *есть область значений.*

(v) Пусть r *– кардинальное число* $\leq |X|$. *Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех* $\mathcal{R}$ *-классов, содержащихся в* D_r *и множеством всех разбиений* π *множества* X, *для которых* $|X/\pi| = r$, *что* $\mathcal{R}$ *-класс, соответствующий* π, *состоит из всех элементов полугруппы* $\mathcal{F}_X$, *для которых связанные с ними разбиения совпадают с* π.

(vi) Пусть r *– кардинальное число* $\leq |X|$. *Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех* $\mathcal{H}$ *-классов, содержащихся в* D_r, *и множеством всех пар* (π, Y), *где* π *есть разбиение множества* X, *а* Y *– подмножество множества* X, *причем*

$|X/\pi| = |Y| = r$, *что* $\mathcal{H}$ *-класс, соответствующий* (π, Y), *состоит из всех элементов полугруппы* $\mathcal{F}_X$, *для которых связанные с ними разбиения совпадают с* π, *а области значений – с* Y.

Теорема 4

(Клиффорд А., 1972). *Пусть* $У$ *– подмножество множества* X, *и пусть* π *– такое разбиение множества* X, *что* $|У| = |X/\pi|$. *Пусть* H *есть* $\mathcal{H}$ *-класс полугруппы* $\mathcal{F}_X$, *соответствующий паре* $(\pi, У)$, *тогда:*

(i) H *содержит идемпотент тогда и только тогда, когда* Y *пересекается с каждым классом эквивалентности множества* X *по mod* π *точно по одному элементу (т. е.* Y *– «поперечное сечение» разбиения* π*).*

(ii) Если H *содержит идемпотент, то* H *– полугруппа, изоморфная симметрической группе* $\mathcal{G}_Y$ *на множестве* Y.

Определение 8 (Ким, В. И., 2008).

Произвольное непустое линейно упорядоченное множество X называется *цепью.*

Если множество X частично упорядочено, то естественно рассматривать такие преобразования $X \to X$, которые сохраняют порядок (т.е. являются изотонными). Рассмотрим случай, когда X – цепь (элементы цепи упорядочены следующим образом: 1 < 2 < 3 < ..< n) и пусть $O(X)$ – полугруппа изотонных преобразований $X \to X$, то есть сохраняющих порядок:

$$O(X) = \{ \alpha : X \to X \mid x \le y \Rightarrow \alpha(x) \le \alpha(y), \forall x, y \in X \}$$

В работе произведены вычисления элементов полугруппы O_n, вплоть до размерности задачи n = 7, всех регулярных элементов, и идемпотентов. Результаты сведены в таблицу, где | O_n | – число элементов в полугруппе O_n, |Idemp| – количество идемпотентов в O_n, |Reg| – количество регулярных элементов. В результате поиска был установлен факт, что все элементы данной полугруппы регулярны. В итоге были перепроверены результаты, полученные В.И. Кимом.

Таблица 1 – результат численного поиска всех элементов
полугруппы O_n для $n \in [2; 7]$ идемпотентов.

n	|On|	|Idemp|	|Reg|
2	3	3	3
3	10	8	10
4	35	21	35
5	126	55	126
6	462	144	462
7	1716	377	1716

Из таблицы 1 видно, что число регулярных элементов всегда совпадает с мощностью полугруппы.

Для того чтобы понять строение полугруппы, важно знать структуру не только L и R-классов, но и D- классов (строение так называемых egg-box). D-классы, обозначаемые D_r , будем рассматривать для случая n = 4 и в нашем случае, r = {1, 2, 3, 4}. В следующей таблице 2 приведена «egg-box» – картина для O_4. Здесь в строках записаны R-классы, а в столбцах L- классы. D_r-классы выстроены по возрастанию ранга образов (в D_4 расположены элементы, образы которых одноэлементны, в D_3 – двухэлементны, в D_2 – трёхэлементны, в D_1 – четыре элемента). Идемпотенты выделены «жирным» и «курсивом».

Таблица 2 – “Egg-box” – картина для O_4.

$\mathcal{D}_1$	***1234***					
$\mathcal{D}_2$	1123	1124	***1134***	***2234***		
	1223	***1224***	***1334***	2334		
	1233	***1244***	1344	2344		
$\mathcal{D}_3$	1112	1113	***1114***	2223	***2224***	***3334***
	1122	***1133***	***1144***	***2233***	***2244***	3344
	1222	***1333***	***1444***	2333	2444	3444
$\mathcal{D}_4$	***1111***	***2222***	***3333***	***4444***		

Из таблицы 2 видно, что все H-классы (пересечение L и R-классов) одноэлементные. Аналогичный пример приведен для структуры классов Грина полугруппы изотонных преобразований с убывающим порядком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью данной работы является исследование классов Грина на полугруппах. Для достижения цели был освоен теоретический материал по алгебраической теории полугрупп, были введены в рассмотрение: полугруппа преобразований, отношения эквивалентности элементов на полугруппе, полугруппы изотонных преобразований цепей.

Самостоятельно проведены расчеты классов Грина на полугруппе преобразований, на полугруппе изотонных преобразований цепей, а также на полугруппе изотонных преобразований с убывающим порядком, состоящей из четырех элементов. Результаты самостоятельного исследования изложены в параграфах 4.2–4.3. Предложенный и разобранный в примерах метод может быть использован для вычисления классов Грина широкого класса полугрупп преобразований с различными дополнительными условиями с помощью вычислительной техники.