Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Вопросы аналитического продолжения дзеты-функции Римана и L-функции Дирихле

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 — математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Жумагалиев Айтас Толегенович

Научный руководитель
доцент, к.ф.- м.н., доцент ________________ Сецинская Е.В.

Зав. кафедрой
зав.каф.,к.ф.- м.н. ________________ Водолазов А.М.

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Целью бакалаврской работы является изучение аналитического продолжения ζ-функции Римана и L-функции Дирихле.

Бернгард Риман(1826-1866)-один из крупнейших немецких математиков XIX века, оставивший фундаментальные работы в различных областях математики и ее приложений. Особенно большое значение имеют его работы по теории функций комплексного переменного и по теории рядов. Мемуар Римана «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины» является основой всего дальнейшего развития современной теории простых чисел. В этом мемуаре Риман рассматривает дзету-функцию $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сначала для комплексных значений $s = \sigma + it$, таких, что $\sigma > 1$, а затем аналитически продолжает ее на всю комплексную плоскость. Он устанавливает основные свойства этой функции, в том числе функциональное уравнение, дающее непосредственную связь между $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$. Функциональное уравнение для $\zeta(s)$ показывает своего рода симметрию этой функции относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Риман установил связь между поведением $\zeta(s)$ в так называемой критической полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ и распределением простых чисел. Риман высказал гипотезу, что в этой полосе все нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Есть все основания предполагать, что эта гипотеза Римана верна, однако доказать ее не удалось. Доказательство гипотезы Римана дало бы возможность решить ряд важных проблем, возникающих при изучении простых чисел.

Работа состоит из трех разделов.

В первом разделе рассматривается ζ-функция Римана, определения и простейшие свойства. Функциональное уравнение ζ-функции, приближенное функциональное уравнение ζ-функции.

Во втором разделе рассматривается L-функция Дирихле и ее свойства, определение L-функции и их простейшие свойства.

В третьем разделе рассматривается аналитическое продолжение L-функции Дирихле, функциональное уравнение L-функции, метод редукции к степенным рядам в теории L-функции числовых полей.

Краткое содержание работы:

Раздел 1. Первый подраздел посвящен аналитическому продолжению дзета-функции. Вначале вводится понятие дзета-функции Римана

Определение 1.1 При $Res = \sigma > 1$, дзета-функция Римана задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Из определения следует, что $\zeta(s)$-аналитическая функция в полуплоскости $Res > 1$. И доказывается формула Эйлера.

Лемма 1.1 (формула или тождество Эйлера). При $Res > 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Далее рассматривается доказывается

Теорема 1.1 (функциональное уравнение дзета-функции). Имеет место равенство

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{-(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

о том, что имеет место равенство функциональное уравнение дзета-функции Римана.

Во втором подразделе рассматривается функциональное уравнение дзета-функции Римана. Доказывается теорема Эйлера с помощью преобразования Абеля.

Теорема 1.2 (формула суммирования Эйлера). Пусть $f \in C^2[a, b]$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) +$$

$$+\sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Теперь переходим к доказательству функционального уравнения дзета-функции Римана, которая продолжается аналитически на всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = 1$ и удовлетворяет тождеству:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Раздел 2. Полностью посвещина L-функции Дирихле и ее свойствам. Рассматривается основное определение L-ряда называется ряд

$$L = L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, Res > 1.$$

Ввиду того, что $|\chi(n)| \leqslant 1$, следует аналитичность $L(s,\chi)$ в полуплоскости $Res > 1$. Для $L(s,\chi)$ имеет место аналог формулы Эйлера (эйлеровское произведение), отсюда следует.

Лемма 2.1 При $Res > 1$ справедливо равенство

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{1}$$

и

Лемма 2.2 Пусть $\chi(n) = \chi_0(n)$ по модулю k. Тогда при $Res > 1$

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p\diagdown k}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Если характер $\chi(n)$ является произвольным, а $\chi_1(n)-$ примитивным характером по модулю $k_1, k_1|k$, то $L(s,\chi)$ лишь простым множителем отличается от $L(s,\chi_1)$. Следует

Лемма 2.3 Пусть χ_1-примитивный характер по модулю k_1 и $\chi-$индуцированный χ_1 производный характер по модулю $k, k_1 \neq k$. Тогда при $Res > 1$

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p\diagdown k\\ p\times k_1}}\left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right),$$

которая гласит: пусть χ_1- примитивный характер по модулю k_1 и $\chi-$индуцированный χ_1 является произвольным характером по модулю $k, k_1 \neq k$. Тогда при $Res > 1$

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \prod_{\substack{p \diagdown k \\ p * k_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

Лемма 2.4 Пусть $\chi \neq \chi_0$; тогда при $Res > 0$ справедливо равенство

$$L(s,\chi) = s \int\limits_1^\infty S(x) x^{-s-1} dx, \tag{2}$$

где

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n).$$

В заключении данного раздела рассматривается теорема: при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ имеет место оценка

$$N(\sigma, T) \leqslant cT^{4\sigma(1-\sigma)} (\log T)^{12}.$$

V с $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $\alpha = 1$, $T \geqslant 2$, будем иметь

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right); \tag{3}$$

далее, при $(k,l) = 1$

$$\psi(x;k,l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi mod k} \psi(x,\chi)\bar{\chi}(l).$$

Таким образом, чтобы знать поведение $\psi(x;k,l)$, надо знать поведение $\psi(x,\chi)$ при всех χ по модулю k, то есть надо знать поведение интеграла в $\zeta(s)M_X(s) = \Phi(s) + R(s)$, а чтобы исследовать интеграл в $\zeta(s)M_X(s) = \Phi(s) + R(s)$, надо об $L(s,\chi)$ иметь те же сведения, что и о дзета-функции.

Раздел 3. Здесь рассматривается аналитическое продолжение L-функции Дирихле. Данный раздел разделен на два порагрофа: функциональное уравнение L-функции и метод редукции к степенным рядам в теории L-функции числовых полей.

Лемма 3.1 Пусть χ_1-примитивный характер по модулю k_1 и χ-индуцированный χ_1 производный характер по модулю $k, k_1 \neq k$. Тогда при $Res > 1$

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \prod_{\substack{p \diagdown k \\ p \times k_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

Теорема 3.1 (функциональное уравнение).

Пусть χ-примитивный характер по модулю k,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1) = +1; \\ 1, & \text{если } \chi(-1) = -1;. \end{cases}$$

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+\delta)/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi).$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^\delta \sqrt{k}}{\tau(\chi)} \xi(s,\chi). \tag{4}$$

В первом подразделе даказывается функциональное уравнение и теорема о среднем Виноградова получил: пусть $\tau \geqslant 0$-целое, $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$. Тогда

$$J = J_k(P) = J_{k,n}(P) \leqslant D_\tau * P^{2k-\Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau\right),$$

$$D_\tau = (n\tau)^{6n\tau}(2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Из этой теоремы выводится следствие: $\xi(s,\chi)-$целая функция; если

$$\chi(-1) = +1,$$

то единственными нулями $L(s,\chi)$ при $Res \leqslant 0$ являются полюсы $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, то есть точки $s = -1, -3, -5, \ldots$.

Во втором подразделе рассматривается ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, s = \sigma + it$$

и соответствующий ему (с теми же коэффициентами) степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Известно, что поведение соответствующего степенного ряда

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

на границе круга сходимости позволяет судить о некоторых аналитических свойствах рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, s = \sigma + it.$$

Нужно сказать, что для определенных классов степенных рядов, например рядов с конечнозначными коэффициентами и рядов с целыми коэффициентами, задача их поведения на границе сходимости достаточно хорошо изучина и это позволяет получать новые результаты относительно аналитических свойств соответствующих рядов Дирихле. Такой метод исследования аналитических свойств рядов Дирихле получил название метода редукции к степенным рядам.

Этот метод нашел применение в теории L-функций числовых полей при решеннии задач, которые непосредственно связаны с изучением аналитических свойств конкретных рядов Дирихле. Более того, этот метод позволил получить новые результаты в теории классических L-функций Дирихле (с числовыми характерами Дирихле). В классе Элеровых произведений с конечнозными коэффициентами классические L-функции Дирихле определяются как мероморфные функции с единственно возможным полюсом в точке $s = 1$ и с определенным условием роста модуля вдоль мнимой оси комплексной плоскости.

Классические L-функции Дирихле допускают «хорошую» аппроксимацию в любом прямоугольнике критической области полиномами Дирихле с вполне определенными коэффициентами.

Этот метод позволил получить новые результаты в теории L-функций Дирихле числовых полей, а также получено частичное решение задачи Ю.В.Линника о целостности скалярного произведения двух L-функций Дирихле числовых полей. Далее рассматривается.

Теорема 3.3 Ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, s = \sigma + it, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \tag{5}$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, порядок роста модуля которой удовлетворяет условию (3.8), когда соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.

В которой сказанно, что классические L-функции Дирихле с неглавными характерами в классе эйлеровых произведений с конечнозначными коэффициентами определяются как целые функции, порядок роста модуля которых удовлетворяет условию при $\sigma < 0$ $|f(s)| < e^{|s| \ln |s| + A|s|}, s = \sigma + it$, где A-некоторая положительная константа.

Отметим, что существенным моментом при доказательстве этого утверждения явился тот факт, что при условиях теоремы соответствующие степенные ряды определяют рациональные функции, полюса которых располагаются в точках единичной окружности, соответствующих корням из единицы, кроме точки $z = 1$.

В данном разделе, прежде всего, мы получим необходимые и достаточные условия на ряды Дирихле, выраженные в терминах граничных свойств соответствующих степенных рядов, при которых такие ряды определяют целые функции, порядокроста модуля которых в левой полуплоскости удовлетворяет условию

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1, s = \sigma + it,$$

которое в отличие от теоремму 3.3 не требует конечнозначности коэффициентов.

Теорема 3.4 (Ряд Дирихле)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, s = \sigma + it, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, порядок роста модуля которой удолетворяет условию $|f(s)| < e^{|s|\ln|s| + A|s|}, \quad s = \sigma + it$, когда соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.

Основным результатом данной работы являеться следующая лемма 3.4 в которой сказанно, что если ряд Дирихле вида:

$$|f(s)| < e^{|s|\ln|s| + A|s|}, \quad s = \sigma + it,$$

при условии $\sigma < -\sigma_0$ определяет мероморфную функцию с единственно возможным простым полюсом в точке $s = 1$, то для любого $0 < \rho < e^{-(A+1)}$ для функции $f(s) * \Gamma(s)$ имеет место разложение

$$f(s) * \Gamma(s) = \Phi_\rho(s) + \rho^s * \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k + s},$$

где $\Phi_\rho(s)$−целая функция и $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) * \Gamma(s))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как функция вещественной переменной дзета-функция была введена в 1737 году Эйлером, который и указал её разложение в произведение. Затем эта функция рассматривалась Дирихле и, особенно успешно, Чебышёвым при изучении закона распределения простых чисел. Однако наиболее глубокие свойства дзета-функции были обнаружены позднее, после работы Римана (1859), где дзета-функция рассматривалась как функция комплексного переменного. L-функция Дирихле, соответствующая главному характеру по модулю k, связана с ζ-функцией Римана формулой

$$L_{x_0}(s) = \zeta(s) \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Эта формула обусловливает многочисленные применения L-функций в теории простых чисел. Обобщённая гипотеза Римана состоит из того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L-функциями Дирихле. На 2004 год проверены более 1013 первых нулей.

Большинство математиков верят, что гипотеза верна. Многие утверждения о распределении простых чисел, в том числе о сложности некоторых целочисленных алгоритмов, доказаны в предположении верности гипотезы Римана. В то время как не существует простой закономерности, описывающей распределение простых чисел среди натуральных, Риман обнаружил, что число $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x, выражается через распределение нетривиальных нулей дзета-функции.

Гипотеза Римана входит в список семи «проблем тысячелетия», за решение каждой из которых Математический институт Клэя (Clay Mathematics Institute, Кембридж, Массачусетс) выплатит приз в 1 млн. долларов США. Интересно, что опровержение гипотезы Римана не даст права на получение приза.

Знаменит ответ Гильберта на вопрос о том, каковы будут его действия, если он по какой-либо причине проспит пятьсот лет и вдруг проснется. Математик ответил, что самым первым делом он спросит была ли доказана гипотеза Римана.

В работе были приведенны функциональные уравнения ζ-функции Римана и L-функции Дирихле, для их аналитического продолжения в не критической полосы. Приведен метод редукции к степенным рядам.