Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Алгебры отношений с

примитивно-позитивными операциями

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Бондаренко Ирины Евгеньевны

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н.,профессор ________ Д. А. Бредихин

Зав. кафедрой
зав.каф., к.ф-м.н. ________ А. М. Водолазов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру, называемую Ω - алгеброй отношений. Прежде всего алгебра отношений берет свое начало в исследованиях Де Моргана, Пирса, Фреге и Шредера.

Новый этап в развитии теории алгебр отношений связан с именем Тарского. Альфред Тарский был первым из математиков, кто начал рассматривать алгебры отношений с точки зрения теории универсальных алгебр. Одним из важных направлений в исследованиях алгебр отношений является изучение их свойств, выраженных в виде тождеств.

Как правило, операции над отношениями задаются с помощь формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Важным классом логических операций является класс диофантовых операций. Операция называется диофантовой (в другой терминологии – примитивно-позитивной), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Изучение примитивно-позитивных операций играет важную роль при рассмотрении производных объектов над универсальными алгебрам.

Данная бакалаврская работа разделена на три раздела.

Первый раздел посвящен основным определениям и обозначениям, связанным с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Приведены некоторые определения и обозначения общего характера. Вводится, занимающее центральное место в дальнейшем изложении, понятие примитивно-позитивной (диофантовой) операции над отношениями и рассматривается представление диофантовых операций с помощью графов.

Второй раздел имеет реферативный характер, в ней излагаются результаты, полученные в работах Д. А. Бредихина «Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями».

Третий раздел основан на статье Д. А. Бредихина «О базисах тождеств многообразий группоидов отношений». В этом разделе самостоятельно докажем теорему о базисах тождеств одного из класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями, а так же разработаем программное обеспечение, позволяющий решить является ли система тождеств независимой.

Краткое содержание работы:

В **разделе 1** приведены основные определения и обозначения, связанные с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Рассматрим основные понятия общей алгебры, такие как определение алгебры (универсальной алгебры), алгебры отношений и другие.

Определение 4. *Под алгеброй (универсальной алгеброй) типа $\tau = \{n_j\}_{j \in J}$ мы понимаем пару $A = (A, \{f_j\}_{j \in J})$, где A - множество, называемое носителем алгебры, и $\{f_j\}_{j \in J}$ - семейство операций на A, причем арность операции f_j совпадает с n_j.*

Определение 7. *Алгеброй отношений называется пары (Φ, Ω), где Φ некоторое множество бинарных отношений, замкнутое относительно совокупности операции Ω над ними.*

Так же в первом разделе рассматривается язык (алгебра) термов.

Для задания функций и производных операций, и для изучения их свойств используют специальный формальный язык — язык термов.

Определение 7. *Термами называются слова, построенные по таким правилам:*

1. Все символы из T_0 — термы.

2. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то слово вида $f^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом $(f^n \in F, n \geqslant 1)$

3. Термами являются только те слова, которые определены правилами 1 и 2.

Приводятся основные понятия и факты связанных с многообразием универсальных алгебр.

Определение 10. *Класс $\mathscr{K}$ - однотипных алгебр называется многообразием, если существует такая система тождеств Σ, что для любой алгебры A, соответствующего типа, $A \in \mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет системе тождеств Σ.*

Формулируется основная теорема данного раздела, теорема Биркгофа (структурная характеристика многообразия).

Теорема 1. *(Биркгофа) Непустой класс алгебр R сигнатуры Ω тогда и только тогда является многообразием, когда R замкнут относительно подалгебр, факторалгебр и декартовых произведений.*

Раздел 2 имеет реферативный характер и основывается на статье Д. А. Бредихина «Описание эквациональной теории алгер отношений с примитивно-позитивными операциями», в ней используется аппарат теории графов, находится эффективное описание эквациональных теорий алгебр отношений с позитивными операциями. В качестве следствия, в частности, устанавливается их разрешимость. Полученный результат применяется для характеризации многообразий, порожденных позитивными редуктами алгебр отношений Тарского, т.е. алгебрами с множеством операций $\Omega \subset \{\circ, ^{-1}, \cap, \cup\}$.

Для начала рассматриваются алгебры отношений с примитивно-позитивными операциями.

Определение 15. *Логическая операция называется примитивно – позитивной (в другой терминологии диофантовой), если она в своей предваренной форме содержит только кванторы существования и операции конъюнкции.*

Примитивно-позитивные операции могут быть описаны на языке теории графов.

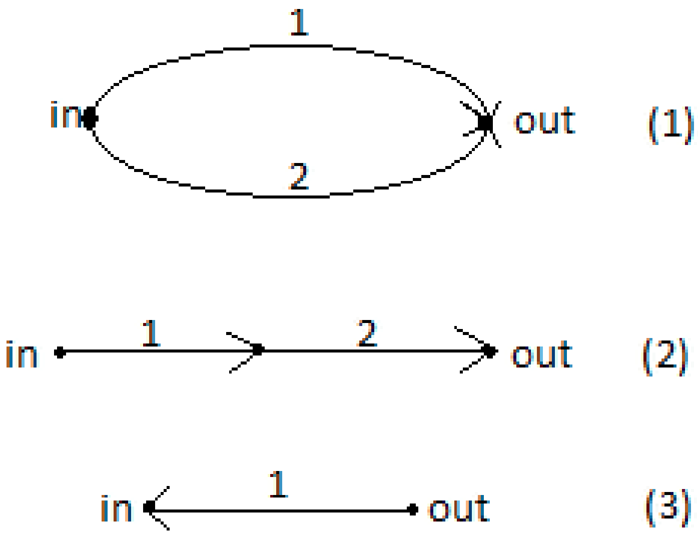
Всякой примитивно-позитивной операции F_ϕ ($\phi(z_0, z_1, r_1, r_2, \ldots, r_n)$), задаваемой с помощью формулы ϕ может быть сопоставлен двухполюсник $G = G(F) = G(\phi) = (V, E, in, out)$ следующим образом: множество вершин V совпадает с множеством логических переменных, входящих в запись формулы ϕ. Тройка $(z_i, k, z_j) \in E$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)((z_i, z_j) \in \rho_k)$ входит в запись формулы ϕ, $in = z_0, out = z_1$

В качестве примера приведем двухполюсники соответствующие следующим операциям:

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (z_0, z_1) \in \rho_1 \wedge (z_0, z_1) \in \rho_2\}; \quad (1)$$

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (\exists z_2)(z_0, z_2) \in \rho_1 \wedge (z_2, z_1) \in \rho_2\}; \quad (2)$$

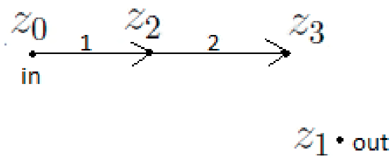
$$\rho_1^{-1} = \{(z_0, z_1) | (z_1, z_0) \in \rho_1\}. \quad (3)$$



Выполняется и обратное: всякому двухполюснику соответствует формула определяющая примитивно-позитивную операцию, которая строится следующим образом: $G = (V, E, in, out)$. Всякой вершине из V сопоставляется индуцированная логическая переменная, причем $in = z_0, out = z_1$. Формула начинается с кванторов существования по всем этим переменным, за исключением z_0, z_1. Далее следует конъюнкция атомарных формул $r_k(z_i, z_j)((z_i, z_j) \in \rho_k)$ для всех дуг $(v_i, k, v_j) \in E$.

Например,

$$\rho_1 * \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (\exists z_2)(\exists z_3)(z_0, z_2) \in \rho_1 \wedge (z_2, z_3) \in \rho_2\}$$



Основным результатом второго раздела является теорема 3.

Теорема 3. *Пусть Ω - множество позитивных операций. Тождество*

$$p = q (p \leqslant q)$$

принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ тогда и только тогда, когда существуют гомоморфизмы из $G(q)$ в $G(p)$ и из $G(p)$ в $G(q)$ (существует гомоморфизм из $G(q)$ в $G(p)$).

Теорема 2 непосредственно вытекает из следующего следствия:

Следствие 1. *Пусть Ω - множество позитивных операций. Тогда эквациональная теория $Eq\Omega(Eq\{\Omega, \subset\})$ разрешима.*

И доказывается с помощью следующих лемм:

Лемма 1. *Пусть $p \in P^{(n)}$ и $r = (r_1, \cdots, r_n)$. Тогда*

$$\phi(G(p)) \equiv p^{Af}(r).$$

Лемма 2. *Если $p \in P^{(n)}$, то $F_{G(p)}(R) = p^{Re}(R)$, где $R = (R_1, \cdots, R_n)$ и $R_1, \cdots, R_n \in Rel(X)$.*

Лемма 3. *Фактор-алгебра $Sf\backslash \equiv$ (упорядоченная отношением $\leqslant$ фактор-алгебра $Sf\backslash \equiv$) является свободной алгеброй в многообразии $Var\{\Omega\}(Var\{\Omega, \subset\})$, порожденной элементами $[r_k(\alpha, \beta)](k = 1, 2, \cdots)$.*

Лемма 4. *Пусть G и $\tilde{G}$ - двухполюсники. Тогда*

$$L \vdash (\forall \alpha, \beta) \phi(G) \to \phi(\tilde{G})$$

в том и только том случае, когда существует гомоморфизм из G в $\tilde{G}$.

Раздел 3 основан на статье Д. А. Бредихина «О базисах тождеств многообразий группоидов отношений». В этой главе, используя аппарат изложенный в статье Д. А. Бредихина, самостоятельно докажем теорему о базисах тождеств некоторого класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями.

Сосредоточим внимание на следующей операции над отношениями, задаваемой формулой:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(z, z) \in \rho \wedge (z, z) \in \sigma\},$$

где ρ и σ – бинарные отношения на множестве X.

Для данной операции формулируются и доказываются следующие теоремы:

Теорема 8. *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$xy = yx\ (1),\ (xy)^2 = xy\ (2),\ (xy^2)z = x(y^2z)\ (3),$$

$$(xy)y = xy\ (4),\ x^2y = xy\ (5).$$

Теорема 9. *Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:*

$$xy \leq x^2\ (6).$$

Доказательство теоремы основывается на описании эквациональных теорий алгебр отношений с примитивно-позитивными операциями. Доказательство разбито на ряд лемм, некоторые из них формулируются ниже.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ – множество индуцированных переменных и Ξ – множество всех термов группоида над алфавитом X.

Лемма 5. *Для любого терма $p \in \Xi$, либо $p \in X$, либо*

$$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}).$$

Лемма 7. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots, n$ имеем $p \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.*

Лемма 8. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда $p \cong pq$.*

Необходимость условий доказывается непосредственными вычислениями.

Так же в этом разделе разработана программа, предназначена для доказательства независимости системы тождеств. Данная программа анализирует каждое тождество из системы и выясняет существует ли такой группоид, на котором данное тождество не выполняется, при выполняемости остальных. С помощью этой программы удалось доказать, что в системе тождеств (1)-(5) из теоремы 4 тождества 1, 3 и 5 явзяются незавимыми, а для тождеств 2 и 4 этот вопрос остается открытым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная бакалаврская работа была разделена на три раздела.

В первом разделе познакомились с основными определениями и обозначениями, связанными с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Рассмотрели основные понятия общей алгебры. Рассмотрели представление примитивно-позитивных операций с помощью графов.

Раздел 2 имела реферативный характер, он посвящен изучению эквациональной теории алгебр отношений с позитивными операциями на основе статьи Д. А. Бредихина.

В третьем разделе содержится результат полученный в ходе самостоятельной работы, в ней доказывается теорема о базисах тождеств некоторого класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями. Идея доказательства достаточности восходит к работам Д. А. Бредихина. Так же в этом разделе был разработан алгоритм проверки системы на независимость, который в последствии реализован в компьютерной программе. Проведен анализ результатов, были получены новые выводы для теорем о многообразиях определённых на проверяемой системе тождеств.