Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА - ШАУДЕРА

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета
Шеиной Анны Михайловны

Научный руководитель

д.ф.-м. наук, профессор		С. Ф. Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м. наук, профессор		Д. В. Прохоров
уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. В результате широкого внедрения компьютерных технологий разложения в ряды Фурье по различным ортогональным системам стали широко использоваться на практике при решения задач хранения, обработки и передачи данных.

Причинами, приведшими к широкому внедрению рядов Фурье в решение прикладных задач, являются такие свойства ортогональных разложений, как простота вычисления коэффициентов, наличие тождества Бесселя, неравенства Бесселя и равенства Парсеваля.

Но также ортогональные разложения обладают рядом недостатков.

1. Условие ортогональности является очень жестким условием на систему, значительно сужающим класс систем, по которым осуществляется разложение.

2. Ортогональные разложения не позволяют корректировать погрешности, возникающие в вычислении коэффициентов.

В силу вышеперечисленных причин возникает актуальная задача определить процесс разложения, наследующий положительные свойства ортогональных разложений. Такие разложения получили название орторекурсивных.

Орторекурсивные разложения (далее ОРР) были предложены Т. П. Лукашенко[1]. Этот способ разложения в случае ортогональной системы дает в точности ряд Фурье разлагаемого элемента по этой системе. В отличие от ортонормированных базисов орторекурсивные разложения устойчивы к ошибкам. Если ошибки не очень большие и орторекурсивное разложение по такой системе сходится к разлагаемому элементу, то ОРР с такими ошибками по-прежнему будет сходиться в точности к разлагаемому элементу.

В данной работе рассмотрены ОРР по различным системам сжатий и сдвигов.

Целями данной работы являются:

- установить условия на функцию, порождающую систему сжатий и сдвигов, при которых система сжатий и сдвигов будет являться системой представления;

- показать, что орторекурсивные разложения обладают классическими свойствами ортонормированных разложений, такими как, тождество Бесселя, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля;

- доказать, что орторекурсивные разложения по системе Фабера–Шаудера

[1] Лукашенко Т. П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приближения: Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. 83.

и системе, порожденной вторым интегралом третьей функции Уолша, сходятся к самой функции;

- написать программы в системе Wolfram Mathematica, строящие орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов для произвольной функции;

Работа состоит из семи разделов. В первом разделе рассматривается общая теория рядов Фурье по ортонормированным системам в пространстве $L_2(a,b)$. Второй раздел посвящен системам сжатий и сдвигов какой-либо функции, здесь приведены классические системы сжатий и сдвигов такие как, система Хаара, система Фабера–Шаудера. В третьем разделе, согласно результатам В. И. Филиппова и П. Освальда[2], устанавливаются условия на функцию, порождающую систему сжатий и сдвигов, при которых данная система будет является системой представления в пространстве $L_2(a,b)$. В четвертом разделе вводится понятие орторекурсивного разложения и получаются основные свойства орторекурсивных разложений. Показано, что орторекурсивное разложение удовлетворяет классическим свойствам ортонормированным систем таким как, тождество Бесселя, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. В пятом разделе исследуются системы вложенных подпространств и устанавливаются условия на функцию, порождающую систему сжатий и сдвигов, при которых орторекурсивное разложение будет сходится к самой функции. Шестой и седьмой разделы посвящены доказательству того, что орторекурсивные разложения по системе Фабера–Шаудера и по системе сжатий и сдвигов, порожденной вторым интегралом третьей функции Уолша, сходится к самой функции. В приложении приведены программы в системе Wolfram Mathematica, демонстрирующие приближение функций по указанным системам.

Список литературы состоит из 19 источников.

Основное содержание работы. Магистерская работа посвящена орторекурсивным разложениям по различным системам сдвигов и сжатий.

Дадим определение системы сжатий и сдвигов.

Определение 1. *Система* $\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^k x - l)$, $k = 0, 1, \ldots,$ $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, *называется системой сжатий и сдвигов функции* $\varphi(x)$.

Ниже приведем классические примеры систем сжатий и сдвигов.

[2]V. I. Filippov, P. Oswald Representation in L_p by series of translates and Dilated of one function // Journal of approximation theory 82, 1995, 15-29

Современные алгоритмы сжатия изображений базируются, в основном, на методах вейвлет-анализа, среди которых заметное место занимает система Хаара.

Множество функций Хаара $\chi_n(x)$, образующих периодическую, ортонормированную и полную систему функций, было предложено им в 1910 г. Система Хаара состоит из кусочно-постоянных функций, заданных на интервале $[0, 1)$ и локализованных на отдельных частях данного интервала. Именно поэтому функции Хаара, которые позволяют оценить локальные свойства исследуемых сигналом, часто называют вейвлетами Хаара.

Определение 2. *Система Хаара - это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in [0, 1],$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, *а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, *определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Система Фабера – Шаудера впервые встречается в работе Г. Фабера[3] Он рассматривал ее как систему неопределенных интегралов от системы Хаара, дополненную функцией, тождественно равной единице. В 1927 году Шаудер переоткрыл систему Фабера–Шаудера: эта система явилась простейшим базисом среди семейства базисов в пространстве $C(0, 1)$.

Определение 3. *Системой Фабера – Шаудера называется система функций*

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0, 1],$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad x \in [0, 1],$$

[3]Faber G., Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 19 (1910), 104—112.

и при $n = 2^k + l$, $k = 0, 1, \cdots$, $l = 1, 2, \cdots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_l^{(k)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2l-1}{2^{k+1}}, \\ & \text{линейна и непрерывна} \\ & \text{на } \left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и на } \left[\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{l}{2^k}\right] \end{cases}$$

Систему Фабера – Шаудера без двух функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ также можно определить как систему сжатий и сдвигов функции $\varphi(x)$ следующим образом

$$\varphi_{k,l}(x) = \varphi(2^k x - l), \tag{1}$$

где функция

$$\varphi(x) = \varphi_{0,0}(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$k = 0, 1, \cdots, \quad l = 0, 1, \cdots, 2^k - l.$

Далее рассматривается система представлений.

Определение 4. *Система элементов* $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ *пространства* L_p *называется системой представления в пространстве* L_p*, если для произвольного элемента* $\varphi \in L_p$ *существует ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ *такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\| = 0,$$

где $\{c_k\}$ *– последовательность действительных или комплексных чисел.*

Определение 5. *Двоичным интервалом называется интервал вида*

$$\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right), \quad \text{где } l = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Для $n = 2^k + l$, $l = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$ обозначим

$$\Delta_n = \Delta_l^{(k)} = \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right); \quad \bar{\Delta}_n = \left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right];$$
$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \quad \bar{\Delta}_1 = [0,1].$$

Если $\delta \subset (0,1)$ - какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначаются левая и правая половины интервала δ соответственно. В частности, для $n = 2^k + l$ имеем

$$\Delta_n^+ = (\Delta_l^{(k)})^+ = \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{2l-1}^{(k+1)},$$
$$\Delta_n^- = (\Delta_i^{(k)})^- = \left(\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{l}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2l}$$

Интервалы $\{\Delta_l^{(k)}\}_{l=1}^{2^k}$ будем называть интервалами k-й пачки, $k = 0, 1, \ldots$.

Приведем условия на порождающую функцию $\varphi(x)$, при которых система сжатий и сдвигов данной функции является системой представления в пространстве $L_p(0,1)$.

Основной результат здесь получен В. И. Филлиповым, П. Освальдом[4].

Теорема 1. *А) Пусть $\varphi \in L_q(0,1)$ для некоторого $1 \leqslant q < \infty$ и*

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \neq 0.$$

Тогда система $\{\varphi_{k,l}\}$ является системой представления в пространстве $L_p(0,1)$ для любых $0 < p \leqslant q$.

Б) Пусть $\varphi \in L_2(0,1)$, $\varphi(x) \not\equiv 0$, тогда $\{\varphi_{k,l}\}$ является системой представления в пространстве $L_p(0,1)$, $0 < p < 1$.

Теорема 2. *А) Пусть φ удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда подсистема $\{\varphi_{k,l}\}$ системы $\{\varphi_n\}$ является системой представления в пространстве*

[4] V. I. Filippov, P. Oswald Representation in L_p by series of translates and Dilated of one function // Journal of approximation theory 82, 1995, 15-29

L_p, $0 < p \leqslant q$, тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\mu\left\{\bigcup_{l=N}^{\infty} \Delta_l^{(k)}\right\} = 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Б) Если φ удовлетворяет условиям теоремы 1 (Б), тогда подсистема системы $\{\varphi_{k,l}(t)\}$ является системой представления в L_p, $0 < p < 1$, тогда и только тогда, когда выполняется (**??**).

Орторекурсивные разложения, введенные Т. П. Лукашенко[5], являются естественным обобщением классических разложений элементов гильбертова пространства в ряды Фурье. Для ОРР остаются справедливыми такие свойства обычных рядов Фурье, как тождество Бесселя, неравенство Бесселя, сходимость к разлагаемому элементу эквивалента равенству Парсеваля.

Определение 6. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная система элементов с единичной нормой. Для каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ определим ОРР следующим образом. Положим, $\widehat{f_1} = (f, e_1)$. Если уже определены $\widehat{f_1}, \cdots, \widehat{f_{n-1}}$, тогда $\widehat{f_n} = (r_{n-1}(f), e_n)$, где $r_{n-1}(F) = f - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \widehat{f_k} e_k$.*

Коэффициенты $\{\widehat{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ называются орторекурсивными коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{e_n\}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f_n} e_n$ – орторекурсивным рядом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}$.

Сформулируем основные свойства ОРР в следующей теореме

Теорема 3. *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов $\mathcal{H}$, f – элемент из $\mathcal{H}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f_n} e_n$ – ОРР элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

[5] Лукашенко Т. П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приближения: Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. 83.

1. Для любого натурального N справедливо тождество Бесселя

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}_n e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\widehat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

2. Имеет место неравенство Бесселя

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

3. ОРР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$ элемента f сходится к f тогда и только тогда, когда выполнено равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

Рассмотрим гильбертово пространство H и в нем некоторое подпространство H_1. Разложив H в прямую сумму подпространства H_1 и его ортогонального дополнения $H^{\perp}$, то есть представив каждый элемент $h \in H$ в виде

$$h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in H_1, h_2 \in H^{\perp},$$

положим $Ph = h_1$. Этот оператор P назовем *оператором ортогонального проектирования* H на H_1 или *проекционным оператором* [**?**].

Пусть в пространстве L_2 задана система замкнутых подпространств

$$\mathcal{H}_n = \{f : f = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \varphi_{n,k}(x)\},$$

где система $\{\varphi_{n,k}(x)\}$ – система сжатий и сдвигов.

Подпространства

$$\mathcal{D}_p = \{g : g = \sum_{k=0}^{2^p-1} b_k \psi_{p,k}(x)\},$$

где $\{\psi_{p,k}\}$ – система сжатий и сдвигов ступенчатой функции $\psi(x) = 1$, являются вложенными друг в друга.

Обозначим через P_n ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}_n$. $P_n^{\perp} = Id - P_n$, где Id – единичный оператор.

D_n – ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{D}_n$ и положим $D_n^{\perp} = Id - D_n$.

Пусть $x \in \mathcal{H}_n$, $\|x\| = 1$. Тогда расстояние от x до $\mathcal{D}_k$ не превосходит $\|D_k^{\perp} P_n\|$. Аналогично, если $y \in \mathcal{D}_n$, $\|y\| = 1$, то расстояние от y до $\mathcal{H}_k$ не превосходит $\|P_k^{\perp} D_n\|$. Накладывая некоторые ограничения на нормы операторов, получим достаточные условия сходимости орторекурсивных разложений по системе подпространств $\{\mathcal{H}_n\}$.

Лемма 1. *Для произвольного элемента f из H справедливо соотношение*

$$\|D_n^{\perp}(f)\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3}$$

Лемма 2. *Для каждого элемента f из H справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \|D_k^{\perp} P_n\| \|\widetilde{f}_k\| = 0. \tag{4}$$

Теорема 4 (достаточные условия сходимости ОРР)**.** *Пусть выполнены следующие соотношения:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \|D_k^{\perp} P_n\|^2 < \infty$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \|D_k^{\perp} P_n\| = 0$ *при фиксированном* k,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n^{\perp} D_n\| = B < 1$.

Тогда орторекурсивное разложение любого элемента f из гильбертова пространства H по системе $\{\mathcal{H}_n\}$ сходится к разлагаемому элементу.

Теорема 5. *Пусть функция $\varphi(x) \in L_2[0,1]$ такова, что $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx \neq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty$, где $\omega_2(\varphi, \delta)$ – интегральный модуль непрерывности в $L_2[0,1]$.*

Тогда для любого элемента из $L_2[0,1]$ орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов $\{\varphi_{k,l}(x)\}$ этого элемента сходится к разлагаемому элементу.

В работе показано, что система Фабера – Шаудера (1) удовлетворяет условиям теоремы **??**, а именно верна следующая теорема

Теорема 6. *ОРР по системе Фабера-Шаудера любой функции $f \in L_2[0,1]$ сходится к самой функции по норме L_2.*

Рассмотрим систему сжатий и сдвигов, порожденную гладкой функцией. А именно рассмотрим третью функцию Уолша. Проинтегрировав дважды эту функцию, получим гладкую функцию $\varphi(x)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \in (0, \frac{1}{4}] \\ \dfrac{1}{16}(-1 + 8x - 8x^2), & x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ \dfrac{1}{2}(1 - 2x + x^2), & x \in (\frac{3}{4}, 1] \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases} \tag{5}$$

Далее рассмотрим систему сжатий и сдвигов, порожденную данной функцией.

$$\varphi_{k,j}(x) = 2^k \varphi(2^k x + j), \quad k \geqslant 0, j = 0, \dots, 2^k - 1. \tag{6}$$

Показано, что орторекурсивное разложение по системе (**??**) сходится к функции. Для этого проверим условия теоремы **??**.

Теорема 7. *ОРР любой функции $f \in L_2[0,1]$ по системе (**??**), где $\varphi(x)$ задается через (**??**), сходится к самой функции по норме $L_2[0,1]$.*

Заключение. В заключении приведены основные результаты, полученные в данной работе:

- установлены условия на функцию, порождающую систему сжатий и сдвигов, при которых система сжатий и сдвигов будет являться системой представления;

- показано, что орторекурсивные разложения обладают классическими свойствами ортонормированных разложений, такими как, тождество Бесселя, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля;

- доказано, что орторекурсивные разложения по системе Фабера–Шаудера и системе, порожденной вторым интегралом третьей функции Уолша, сходятся к самой функции;

- написаны программы в системе Wolfram Mathematica, строящие орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов для произвольной функции;