Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Двоичные сплайн-вейвлеты

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Мушко Максима Дмитриевича

Научный руководитель

д.ф.-м. наук, профессор		С. Ф. Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м. наук, профессор		Д. В. Прохоров
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Большинство численных методов решения задач математического анализа так или иначе связано с аппроксимацией функций. Типичной задачей приближения является задача интерполяции. Пусть заданы значения неизвестной функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются узлами интерполяции. Требуется построить функцию $P(x)$, которая приближала бы искомую функцию на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ с той или иной точностью, и такую чтобы она точно совпадала с $f(x)$ в узлах интерполяции.

Классическим методами решения задачи интерполяции являются такие конструкции, как интерполяционный многочлен Лагранжа или интерполяционный многочлен Ньютона.

Однако, такие многочлены имеют существенный недостаток. Они строятся сразу по всем узлам интерполяции, то есть являются примером глобальной интерполяции. При этом увеличение количества узлов приводит к увеличению степени многочлена, и как следствие, к проявлению его колебательных свойств. Поэтому обычную полиномиальную интерполяцию осуществляют максимум по 3-4 узлам. То есть проводят локальную интерполяцию. Однако, такая интерполяция, в свою очередь, имеет следующий недостаток: интерполяционная функция в узлах стыковки полиномов имеет непрерывность только нулевого порядка, то есть принадлежит к классу C^0.

Для решения этого недостатка была придумана интерполяция функциями, которые были бы непрерывны в узлах склейки локальных многочленов по производным первого, второго порядка и так далее. Такую функцию назвали сплайном.

Особую популярность сплайны получили в теории приближения из-за задачи интерполяции. Это объясняется тем, что сплайны обладают исключительно хорошими аппроксимативными свойствами, универсальностью и обеспечивают простоту реализации вычислительных алгоритмов, полученных на их основе. Однако сам термин сплайн и теория интерполирования сплайнами берёт начало со статьи Айзека Шонберга в 1946 году. Особенное её интенсивное развитие произошло в 50-70 годы. В настоящее время традиционной прикладной сферой применения сплайнов является Системы Автоматизированного Проектирования

(САПР).

Однако потенциальные возможности сплайнов гораздо шире, чем описание некоторых кривых. В реальном мире большое количество физических процессов по своей природе являются сплайнами.

Таким образом, сплайн - это не просто математическая абстракция, во многих случаях он является решением дифференциальных уравнений, описывающих многие физические процессы.

В работе отдельная глава будет посвящена определению сплайна, его свойствам и интерполяция сплайнами 3ей степени. Интерполяционный сплайн 3ей степени являются самым популярным на практике сплайном. Это обусловлено простотой его построения и высокой точностью.

Если мы рассмотрим линейное пространство всех сплайнов, то можно будет говорить о базисе этого линейного пространства. Таким базисом являются сплайны, построенные специальным образом, которые называются базисными или B-сплайнами. С их помощью любой сплайн можно представить в виде линейной комбинации B-сплайнов. Этот факт позволяет уменьшить количество вычислений при построении произвольного интерполяционного сплайна, что является несомненным преимуществом. Впервые в своих работах подобные сплайны рассматривали Фергюсон, Шёнберг, Уитнии Карри.

Во второй главе данной работы мы рассмотрим различным способы построения базисных сплайнов: классическое определение базисного сплайна через понятие разделенной разности; определение базисного сплайна, как свертку функций.

В третьей главе мы зададимся целью построить новый вид B-сплайна, который называется двоичным базисным сплайном. Этот сплайн получается путем интегрирования функций из системы Уолша. Помимо построение и доказательства свойств этого сплайна, будут показаны примеры алгоритмов построения интерполяционных сплайнов на основе двоичных базисных сплайнов, а так же дана оценка погрешности для приближения двоичным базисным сплайном.

Основное содержание работы.

Определение сплайна. Дадим опредление сплайну в общем виде.

Определение 1. *Рассмотрим произвольный отрезок* $[a, b]$*. Разделим этот отрезок на части*

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \tag{1}$$

Сплайном степени m *дефекта* r *называется* $(m - r)$ *раз непрерывно-дифференцируемая функция, которая на каждом отрезке* $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{0, n}$ *представляет собой многочлен степени не выше* m*.*

Сплайн обозначается как $S^{(m,r)}$, а отрезки вида $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{0, n}$ называются сеткой сплайна $S^{(m,r)}$.

Отметим, что сплайн может быть интерполирующий, если

$$S^{(m,r)}(x_k) = f(x_k) \tag{2}$$

Кубические сплайны. Рассмотрим кубический сплайн дефекта 1 $S^{(3,1)}$. Покажем процесс построения кубического сплайна, определим условия его существования. А также дадим оценку погрешности аппроксимации кубическим сплайном.

Требуется построить функцию $S^{(3,1)}$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ вместе со своими первой и второй производными, совпадающую с кубическим полиномом на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$, и удовлетворяющую условиям

$$S^{(3,1)}(x_i) = y_i \tag{3}$$

Сплайн $S^{(3,1)}(x)$, построенный по сетке Δ впредь будет обозначать за $S_\Delta(x)$.

Теперь рассмотрим одно из важных свойств сплайна, которое непосредственно влияет на алгоритм его построения.

Определение 2. *Сплайн* $S_\Delta(x)$ *называется периодическим с периодом* $(b - a)$ *если*

$$S_\Delta^{(p)}(a + 0) = S_\Delta^{(p)}(b - 0), p = 0, 1, 2 \tag{4}$$

На каждом из отрезков вида $[x_{i-1}, x_i]$ кубический полином имеет ровно 4 неизвестных коэффициента. Количество отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ровно n штук. Следовательно, мы имеем $4n$ неизвестных коэффициента. Их можно найти из условий в узлах интерполяции. Таким образом, имеем $4n-2$ условий. В качестве двух недостающий условий задают значения производных первого и второго порядков в узлах x_0 и x_n. Для их вывода используют краевые условия.

При построении кубического сплайна будем работать с "моментами"M_i. Согласно физическому смыслу момента

$$M_i = S''_{\Delta}(x_i), i = \overline{0, n} \tag{5}$$

Так как сплайн является многочленом третей степени, то на каждом из отрезков $[x_{i1}, x_i]$ $S''_{\Delta}(x)$ будет линейной функцией. Мы можем найти ее, например, с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа первой степени.

$$S''_{\Delta}(x) = M_{i-1}\frac{x - x_i}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{6}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$

Проинтегрируем обе части выражения (6) 2 раза и найдем константы интегрирования из условий для сплайна в узлах x_{i-1} и x_i.

$$\begin{gathered} S_{\Delta}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \\ +(\frac{y_{i-1}}{h_i} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6})(x_i - x) + (\frac{y_i}{h_i} - M_i\frac{h_i^2}{6})(x - x_{i-1}) \end{gathered} \tag{7}$$

В этом сплайне значения в узлах для вторых производных M_i пока неизвестны. Будем искать их, исходя из условия непрерывности первых производных в узлах x_i. Для этого найдём односторонние первые производные и, из условия непрерывности, получим

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, i = \overline{1, n-1} \tag{8}$$

Это система $n-1$ уравнений относительно $M_1, M_2 \ldots, M_n$.

Рассмотрим эту систему для периодического случая. В этом случае потребуем, чтобы уравнение было справедливо при $i = n$. В силу периодичности должны выполняться условия:

$$y_n = y_0, M_n = M_0, y_{n+1} = y_1, M_{n+1} = M_1, \dots, h_{n+1} = h_1, \dots \tag{9}$$

Для непериодического случая зададим краевые условия. Физически это означает, что мы задаём наклоны сплайна в точках a, b.

Пусть $S'_\Delta(a) = y'_0$ и $S'_\Delta(b) = y'_n$. Тогда с учетом равенства (8), получаем

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - {y'}_0) \tag{10}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}({y'}_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}) \tag{11}$$

Краевые условия вида $M_0 = 0$ и $M_n = 0$ называют естественными краевыми условиями. Они соответствуют расположению простых опор на концах.

Наряду с естественными, можно ввести и более общие краевые условия.

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \tag{12}$$

$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \tag{13}$$

Введём обозначения:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \tag{14}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \tag{15}$$

Уравнение (8) определяет непериодический сплайн. Его можно записать в матричной форме. При введённых обозначениях условие непрерывности (8) примет вид

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6\frac{(y_{i+1} - y_i)/h_{i+1} - (y_i - y_{i-1})/h_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \tag{16}$$

Распишем систему (16), которая определяет непериодический сплайн в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

За d_i обозначена правая часть равенства (16).

Для периодического сплайна система уравнений в матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

В этом представлении $M_0 = M_n, \lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1}, \mu_n = 1 - \lambda_n$.

Системы уравнений вида (17) и (18) определяют периодический и непериодический сплайн 3ей степени. Таким образом, искомая функция $S_\Delta(x)$ будет построена. Из процесса её построения видно, что такая функция будет единственной для данной сетки.

Теорема 1. *Периодический сплайн $S_\Delta(x)$ с заданными ординатами $y_0, y_1, \dots, y_n = y_0$ в узлах сетки $\Delta : x_0, x_1, \dots x_n$ существует и единственен.*

Приведем результат по оценке погрешности для приближения кубическим сплайном.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^4([a,b])$ - 4 раза непрерывно-дифференцируемая функция.*

Тогда справедливы следующие оценки:

$$||f(x) - S_\Delta(x)|| \leq M_4 h^4 \tag{19}$$

$$||f'(x) - S'_\Delta(x)|| \leq M_4 h^3 \tag{20}$$

$$||f''(x) - S''_\Delta(x)|| \leq M_4 h^2, \tag{21}$$

где $M_4 = ||f^{(4)}||_{C[a,b]} = max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$, $h = \frac{b-a}{n}$.

B-сплайны как разделенная разность от усеченной степенной функции. Рассмотрим особый вид сплайна, который называют базисным или B-сплайном. Данный вид сплайна имеет важное значения, так как он образует базис в пространстве кусочно-полиномиальных функций с заданной сеткой.

Пусть функция $f(x)$ задана значениями в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$.

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{22}$$

Определение 3. *Разделенной разностью k-го порядка, построенной по значениям функции в узлах $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ называется отношение вида*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{23}$$

Разделенную разность нулевого порядка определим как значение функции $f(x)$ в точке x_i.

Определение 4. *Разделенной разностью первого порядка для многочлена $p(x)$ называется отношение вида:*

$$p[x, x_0] = \frac{p(x_0) - p(x)}{x_0 - x} \tag{24}$$

Многочлен $p(x_0) - p(x)$, расположенный в числителе, обращается в 0 в точке x_0. Следовательно, по теореме Безу, этот многочлен без остатка делится на $(x_0 - x)$. Отсюда следует, что разделенная разность первого порядка для полинома степени m сама является полиномом степени $(m - 1)$.

Определение 5. *Разделенной разностью k-го порядка для многочлена $p(x)$ называется отношение вида:*

$$p[x, x_0, \ldots, x_{k-1}] = \frac{p[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - p[x, x_0, \ldots, x_{k-2}]}{x_k - x} \tag{25}$$

Эта разделенная разность, при $k = m$, будет полиномом нулевой степени, что следует из приведенных выше рассуждений.

Определение 6. *Усеченной степенной функцией со смещённым началом назовём функцию следующего вида*

$$\sigma_m(z, x) = \begin{cases} (z - x)^m, z > x \\ 0, z \leq x \end{cases} \tag{26}$$

Как видно из определения 6, $\sigma_m(z, x)$ - это кусочно-монотонная функция, непрерывная при $m > 0$. Рассмотрим $\sigma_m(z, x)$ при $m = 0$.

Определение 7. *Ненормированным i-ым базисным сплайном m-го порядка $M_{i,m}(x)$, для неубывающей последовательности узлов $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}$ называется разделенная разность m-го порядка от усеченной степенной функции $\sigma_{m-1}(z, x)$.*

$$M_{i,m}(x) = \sigma_{m-1}[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}](x) \tag{27}$$

Определение 8. *Нормированным i-ым базисным сплайном m-го порядка $N_{i,m}(x)$ для неубывающей последовательности узлов $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}$ называется разделенная разность m-го порядка от усеченной степенной функции $\sigma_{m-1}(z, x)$.*

$$N_{i,m}(x) = (x_{i+m} - x_i)\sigma_{m-1}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}](x) \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть имеется неубывающая последовательность* $x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+m} = x_b$, *где* $x_i < x_{i+1}$. *Пусть* $N_{a,m}(x)$ *- нормированный* B*-сплайн, построенный по этим узлам.* $M_{a,m}(x)$*- соответствующий ему ненормированный* B*-сплайн, построенный по этим узлам.*

Тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение:

a) *Для* $M_{a,m}(x)$

$$M_{a,m}(x) = \frac{(x_b - x)M_{a+1,m-1}(x) + (x - x_a)M_{a,m-1}(x)}{x_b - x_a} \tag{29}$$

b) *Для* $N_{a,m}(x)$

$$N_{a,m}(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_{a+1}} N_{a+1,m-1}(x) + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} N_{a,m-1}(x) \tag{30}$$

Рассмотрим линейное пространство кусочно-полиномиальных функций с заданной сеткой $P_{m,\xi}$. Здесь $\xi = \{x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+m}\}$, m - это порядок кусочно-полиномиальной функции. Очевидно что сплайн-функция в классическом определении является кусочно-полиномиальной функцией и, следовательно, принадлежит линейному пространству $P_{k,\xi}$. Здесь мы можем сформулировать главное свойство B-сплайнов.

Теорема 4. *Карри-Шенберга*

Система функций $\{N_{a,i}\}_{i=1}^{m}$ *образует базис в пространстве* $P_{m,\xi}$.

Данный результат имеет фундаментальное значение, так как с его помощью можно выражать сплайн любой степени в виде линейной комбинации базисных B-сплайнов.

В-сплайны как свертка функций. Рассмотрим способ построение базисных сплайнов через свёртку функций. Будем рассматривать сплайны с сеткой $2^{-k}\mathbb{Z} = 2^{-k}l, l \in \mathbb{Z}$. Подобную сетку будем называть двоичной сеткой, а сплайн, построенные по такой сетке, соответственно, двоичным сплайном. За S_k^n обозначим пространство сплайнов порядка n дефекта 1 с сеткой $2^{-k}\mathbb{Z}$. Положим

$S^n = S_0^n$.

Определим по индукции последовательность функций $B_n(x), x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \ldots$, следующим образом:

$$B_0(x) = \chi_{[0,1]}(x) \tag{31}$$

$$B_{n+1} = (B_n * B_0)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} B_n(x-t)B_0(t)dt = \int\limits_{x}^{x+1} B_n(t)dt \tag{32}$$

Фукнции $B_n(x)$ называются базисными сплайнами (B-сплайнами) порядка n.

Теорема 5. *Для произвольного $n = 0, 1, \ldots$ выполняются условия:*

1) Функции $S(x)$ принадлежит S^n тогда и только тогда, когда существуют числа $a_l \in \mathbb{R}$,$l \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$S(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l B_n(x-l) \tag{33}$$

2) Система $\{B_n(x-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $S^n \cup L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 5 является аналогом теоремы Карри-Шенберга для функций $\{B_n(x-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$.

Построение двоичного базисного сплайна второй степени. Рассмотрим функцию Уолша $W_3(x)$.

$$W_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 1, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{34}$$

Проинтегрируем функцию (36) 1 раз и получим функцию Мартенса-Терехина $G(x)$. При помощи функции Мартенса-Терехина образуем функцию $\varphi(x)$ следующим образом

$$\varphi(x) = 4\chi_{[0,1]}(x) \int\limits_0^x G(t)dt, \tag{35}$$

где $\chi_{[0,1]}(x)$ - это характеристическая функция отрезка [0,1].

Функция $\varphi(x)$ будет иметь следующее аналитическое представление:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -8x^2 + 8x - 1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 8x^2 - 16x + 8, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{36}$$

Рассмотрим систему сдвигов функции $\varphi(x)$.

$$\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}\,, \tag{37}$$

где $\varphi_k(x) = \frac{1}{2}\varphi(x - \frac{k}{4})$.

Лемма 1. *Для любого $x \in [0, 1]$ выполняется следующее равенство*

$$\sum_{k=-3}^{3} \varphi_k(x) = 1 \tag{38}$$

Следствие 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется следующее условие*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k(x) = 1 \tag{39}$$

Теорема 6. *Для любого $x \in [0, 1]$ сплайн порядка 2 дефекта 1 $S^{(2,1)}(x)$ с узлами сетки в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$ представим в виде линейной комбинации из системы $\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}$.*

$$S^{(2,1)}(x) = \sum_{k=-3,k\neq 0}^{3} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{40}$$

Следствие 2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ сплайн порядка 2 дефекта 1 с узлами сетки в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$ представим в виде линейной комбинации функций из системы $\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}$.*

$$S^{(2,1)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{41}$$

Следствие 2 есть аналог теоремы Карри-Шенберга 3.2 для двоичных сплайнов второй степени.

Интерполяция двоичными базисными сплайнами второй степени. Теперь перейдем к рассмотрению алгоритмов построения интерполяционного сплайна, который бы представлял собой линейную комбинацию (43).

Задача состоит в построении сплайна $S(x)$, удовлетворяющего условиям

$$S(x_i) = f(x_i) \tag{42}$$

Рассмотрим 2 способа построения такого сплайна.

В первом алгоритме будем искать $S(x)$ исходя из следующих условий:

1) $x \in [0, \frac{1}{4}]$

$$\begin{cases} s(0) = f(0) \\ s(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) \\ s'(0) = f'(0) \end{cases} \tag{43}$$

2) $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

$$\begin{cases} s(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) \\ s(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \\ s'(\frac{1}{4} - 0) = s'(\frac{1}{4} + 0) \end{cases} \tag{44}$$

...

k) $x \in [\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}]$

$$\begin{cases} s(\frac{k-1}{4}) = f(\frac{k-1}{4}) \\ s(\frac{k}{4}) = f(\frac{k}{4}) \\ s'(\frac{k-1}{4} - 0) = s'(\frac{k-1}{4} + 0) \end{cases} \tag{45}$$

Последнее условия является условием склейки сплайна. И так далее до точки

$\frac{n}{4}$. Таким образом, для каждого отрезка длины $\frac{1}{4}$ мы будем иметь 3 условия на сплайн, что позволит нам найти его коэффициенты. Благодаря следствию 2, мы можем представить сплайн $S(x)$ как линейную комбинацию базисных сплайнов и получить формулы для коэффициентов линейной комбинации.

$$\alpha_k = \frac{a_{k+1}}{4} - \alpha_{k-3} + \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \tag{46}$$

Формула (48) показывает, что $\alpha_k, k > 7$ при $x > 1$ выражаются через предыдущие α_k.

Посмотрим на результаты интерполяции построенным сплайном для функции $sin(x)$. Интерполировать будет на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ с шагом $\frac{1}{4}$. В таблице 1 представлены результаты и погрешность при шаге $\frac{1}{16}$.

Таблица 1: Погрешность для первого способа

№ шага	Значение функции	Значение сплайна	Погрешность
0	0	0	0
1	0.0624593	0.0628215	0.000362145
2	0.124675	0.124996	0.00032121
3	0.186403	0.186523	0.000120145
4	0.247404	0.247404	0
5	0.307439	0.307323	-0.000115437
6	0.366273	0.365966	-0.000306149
7	0.423676	0.423334	-0.00034239
8	0.479426	0.479426	0

Рассмотрим второй способ построения интерполяционного сплайна. Возьмем функции из системы (39) под номерами -3 и -2. Легко увидеть, что $\varphi'_{-2}(0) = 0$.

Рассмотрим следующие условия

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_{-3}(0) + \alpha_2 \varphi_{-2}(0) = f(0) \\ \alpha_1 \varphi'_{-3}(0) + \alpha_2 \varphi'_{-2}(0) = f'(0) \end{cases} \tag{47}$$

Исходя из приведенных выше рассуждений, условие 2 из (49) приобретает вид

$$\alpha_1 \varphi'_{-3}(0) = f'(0) \tag{48}$$

Отсюда мы можем найти $\alpha_1, alpha_2$.

$$\alpha_1 = -\frac{f'(0)}{2} \tag{49}$$

$$\alpha_2 = \frac{f(0) - \alpha_1 \varphi_{-3}(0)}{\varphi_{-2}(0)} \tag{50}$$

Перейдем к следующей точке $x = \frac{1}{4}$ и, по аналогии, получим α_3.

$$\alpha_3 = \frac{f(\frac{1}{4}) - \alpha_2 \varphi_{-2}(\frac{1}{4})}{\varphi_0(\frac{1}{4})} \tag{51}$$

И так далее. На k-ом шаге будем иметь

$$\alpha_k = \frac{f(\frac{k-2}{4}) - \alpha_{k-2}\varphi_{k-5}(\frac{k-2}{4}) - \alpha_{k-1}\varphi_{k-4}(\frac{k-2}{4})}{\varphi_{k-3}(\frac{k-2}{4})} \tag{52}$$

Как можно увидеть из описания алгоритмов, второй алгоритм работает быстрее, так как требует меньшее количество действий на 1 итерацию.

Посмотрим на результаты интерполяции для сплайна, построенным вторым способом. Интерполировать будем функцию $sin(x)$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ с шагом $\frac{1}{4}$. В таблице 2 представлены результаты и погрешность при шаге $\frac{1}{16}$.

Таблица 2: Погрешность для второго способа

№ шага	Значение функции	Значение сплайна	Погрешность
0	0	0	0
1	0.624593	0.0623377	-0.00012157
2	0.124675	0.124351	-0.000323744
3	0.186403	0.186040	-0.00036357
4	0.247404	0.247404	0
5	0.307439	0.307807	0.000368278
6	0.366273	0.366611	0.000338805
7	0.423676	0.423818	0.000141325
8	0.479426	0.479426	0

Оценка погрешности. Посмотрим на оценку погрешности при интерполяции двоичным базисным сплайном. Рассматривать будем интерполяционный сплайн $S(x)$, построенный вторым способом.

Обозначим за $M_j(x)$ значение производной сплайна в точке x_k.

$$M_k = S'(x_k) \tag{53}$$

Сплайн $S(x)$ определен на сетке $[x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$, где $x_{k-1} = \frac{k-1}{4}$, $x_k = \frac{k}{4}$. Таким образом, область определения сплайна $[0, nh]$. Шаг сетки является постоянным $h = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4}$.

Лемма 2. *Пусть $S(x)$ - это интерполяционный двоичный базисный сплайн второй степени, определенный на $[0, nh]$, где h - шаг сетки сплайна. $M_k = S'(x_k), k = \overline{0,n}$. Тогда будет справедлива следующая оценка*

$$|M_n| \leq 2V_0^{nh} f' + |f'(x_0)| \tag{54}$$

Благодаря этому результату, можно получить оценку для интерполяции двочиным базисным сплайном.

Теорема 7. *Пусть $S(x)$ - это двоичный базисный сплайн, интерполирующий фукнцию $f(x)$ в узлах $x_k = kh, k = \overline{0,n}$. Пусть функция $f'(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, nh]$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(x) - f(x)| \leq 3hV_0^{nh} f' + \frac{3}{2}h|f'(x_0)| + max|f'(\xi)|h, \tag{55}$$

где $\xi \in [x_{n-1}, x_n]$.

Данный результат был получем при $x \in [0, nh]$. Преобразим его для того, чтобы получить оценки для $[0, 1]$.

Теорема 8. *Пусть $S(y) = S(\frac{x}{nh})$ - это двоичный базисный сплайн, интерполирующий функцию $f(y) = f(\frac{x}{nh})$ в точках $y_k = kh$. Пусть $f'(y)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$. Тогда будет справедлива оценка.*

$$|S(y) - f(y)| \leq \frac{3}{n}V_0^1 f' + \frac{3}{2n}|f'(x_0)| + \frac{1}{n}max|f'(\xi)|, \tag{56}$$

где $\xi \in [y_{n-1}, y_n]$.

Заключение. В данной работе мы подробно рассмотрели интерполяционные сплайны. В первой главе было приведено общее понятие сплайна, а так же приведено построение кубического интерполяционного сплайна, который является одним из самых популярных сплайнов на практике. Так же была доказана теорема о его существовании и приведена оценка погрешности приближения кубическим сплайном.

Во второй главе пристальное внимание было уделено базисным сплайнам. В работе были рассмотрены 2 способа построения B-сплайнов: как разделенная разность от усеченной степенной функции и как свертка функций.

В третьей главе был построен новый вид базисного сплайна на двоичной сетке. Мы доказали что любой сплайн, построенный на двоичной сетке можно представить в виде линейной комбинации функций из системы сдвигов двоичного базисного сплайна. Данный результат является абсолютно новым. Простота построения системы сдвигов заключается в том, что достаточно определить всего 1 функцию и, путем добавления целого числа к ее аргументу, можно построить остальные функции системы. Так же были приведены алгоритмы построения интерполяционных сплайнов, построенных через линейную комбинацию, и дана оценка погрешности.

Список использованных источников.

1. Де Бор, К. Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор - М.: «Радио и связь» , 1985, 304с.

2. Уолш, Дж. Теория сплайнов и ее приложения /Дж.Уолш, Дж.Алберг, Э.Нильсен - М.: «Мир», 1972, 320с.

3. Кашин, Б.С. Ортогональные ряды. / Б.С.Кашин, А.А.Саакян - М.: «АФЦ», 1999, 560с.

4. Самарский, А.А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин - М.: «Наука» 1989г.

5. Мушко, М.Д. О двоичных базисных сплайнах / М.Д. Мушко // Математика. Механика: сб. науч. Тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. Вып. 18. 2016. С. 48-51.

6. Мушко, М.Д. О двоичных базисных сплайнах / М.Д. Мушко // Научные исследования студентов Саратовского государственного Университета: материалы итоговой студенческой научной конференции.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2016. С. 10-11.