

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Использование показателей Ляпунова для диагностики синхронных режимов**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

Студента 4 курса 431 группы  
направления 03.03.03 «Радиофизика»  
факультета нелинейных процессов

Ханадеева Владислава Андреевича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

А.А. Короновский

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

А.А. Короновский

Саратов 2017 год

## Введение

Исследование хаотической синхронизации в различных нелинейных системах в настоящее время является актуальным научным направлением [1]. Благодаря своей распространённости режимы хаотической синхронизации были обнаружены в физических [2,3], биологических [4], химических [5] и других различных системах. Несмотря на большой интерес к явлению хаотической синхронизации и существование достаточно большого количества статей по данной теме, говорить о том, что явление хаотической синхронизации в нелинейных системах полностью изучено, пока еще явно рано.

На данный момент известны такие типы синхронизации, как фазовая синхронизация [6], полная синхронизация [7], обобщённая синхронизация [8] и др. Одним из наиболее интересных и наименее изученных типов хаотической синхронизации является режим обобщенной синхронизации [9], имеющий место в однонаправленно связанных хаотических системах. На сегодняшний день явления фазовой и обобщённой хаотической синхронизации подробно изучены для широкого класса взаимодействующих систем, но существует множество вопросов, требующих дальнейшего тщательного изучения.

Так как хаотическая синхронизация является сложным и многогранным явлением, для её изучения существуют различные инструменты. Одним из эффективных инструментов для изучения хаотической синхронизации является показатель Ляпунова. С помощью показателя Ляпунова будут диагностироваться такие режимы как обобщённая и фазовая синхронизация.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование процессов наступления режимов хаотической синхронизации для различных динамических систем. Объектами исследования станут такие системы, как однонаправленно связанные хаотические осцилляторы, сеть логистических отображений и связанные осцилляторы Курамото.

## **1 Понятие хаотической синхронизации**

Объектами исследований в данной работе являются динамические системы различных видов. Динамическая система характеризуется набором динамических переменных, по которым можно однозначно определить значения этих переменных в любой момент времени [10]. Интересной особенностью динамических систем является хаотическая динамика. Это значит, что в хаотическом режиме малейшая неточность при задании начального состояния системы стремительно нарастает во времени, что приводит к непредсказуемости на достаточно больших интервалах времени. Следовательно, если на больших интервалах времени поведение динамической системы предсказать нельзя, даже если параметры системы не флуктуируют и система не подвержена действию шума, то можно говорить о хаосе [11].

Ещё одно важное явление, присущее двум или несколько связанным динамическим системам, является синхронизация. Явление синхронизации заключается в синхронном поведении, которое возникает при наложении связи между динамическими системами.

### **1.1 Основные типы хаотической синхронизации**

В данной работе рассмотрены такие типы синхронных режимов, как фазовая, полная и обобщённая хаотическая синхронизация. Фазовая синхронизация представляет собой процесс синхронизации двух и более связанных нелинейных осцилляторов. Если взаимная связь нелинейных осцилляторов достаточно сильна, то она может привести к полной синхронизации. В отличие от фазовой, полная синхронизация может наблюдаться в системах с дискретным временем. Полную синхронизацию можно характеризовать как подавление различий в связанных идентичных системах, приводящее к установлению симметрии [11].

Особенный интерес представляет собой режим обобщённой синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [12]. Общий случай однонаправленной связи имеет вид:

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= f(x(t)), \\y(t + 1) &= g(k, x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{1}$$

Данный режим синхронизации означает, что в системе (1) между состояниями ведущего  $x(t)$  и ведомого  $y(t)$  хаотических осцилляторов присутствует функциональная зависимость (2).

$$y(t) = \Phi(x(t)).\tag{2}$$

Следовательно, состояние ведомой системы  $y(t)$  полностью определяется состоянием ведущей системы  $x(t)$ .

## **1.2 Изучение режима обобщенной хаотической синхронизации с помощью метода вспомогательных систем**

В качестве эталонной системы, с которой было бы удобно работать, было решено исследовать однонаправленно связанную систему (3).

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X), \\ \dot{Y} &= G(Y) + kP(X, Y).\end{aligned}\tag{3}$$

Одним из инструментов для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является метод вспомогательной системы [13].

Предполагается, что можно построить точную ведомую систему  $Y' \in R'$  (4) идентичную  $Y$  и связанную с ведущей системой тем же путём, что и  $Y$  с  $X$ :

$$\dot{Y}' = G(Y') + kP(X, Y').\tag{4}$$

Обобщенная синхронизация между  $X$  и  $Y$  появляется, если имеет место полная синхронизация между  $Y$  и  $Y'$ . Теперь перейдём к изучению режима обобщенной хаотической синхронизации на примере однонаправленных связанных дискретных систем (5). Данная система уже разобран в работе [14], поэтому было проще ориентироваться на полученные результаты.

$$\begin{aligned}x(i + 1) &= f(x(i)), \\ y(i + 1) &= f(y(i)) + k\{f(x(i)) - f(y(i))\}, \\ y'(i + 1) &= f(y'(i)) + k\{f(x(i)) - f(y'(i))\},\end{aligned}\tag{5}$$

На рисунке 1 представлены фазовые портреты системы (5) для логистического отображения  $f(x) = 4ax(1 - x)$  в координатах  $x - y$  и  $y - y'$  при  $a = 1$  и различных значениях параметра  $k$ .

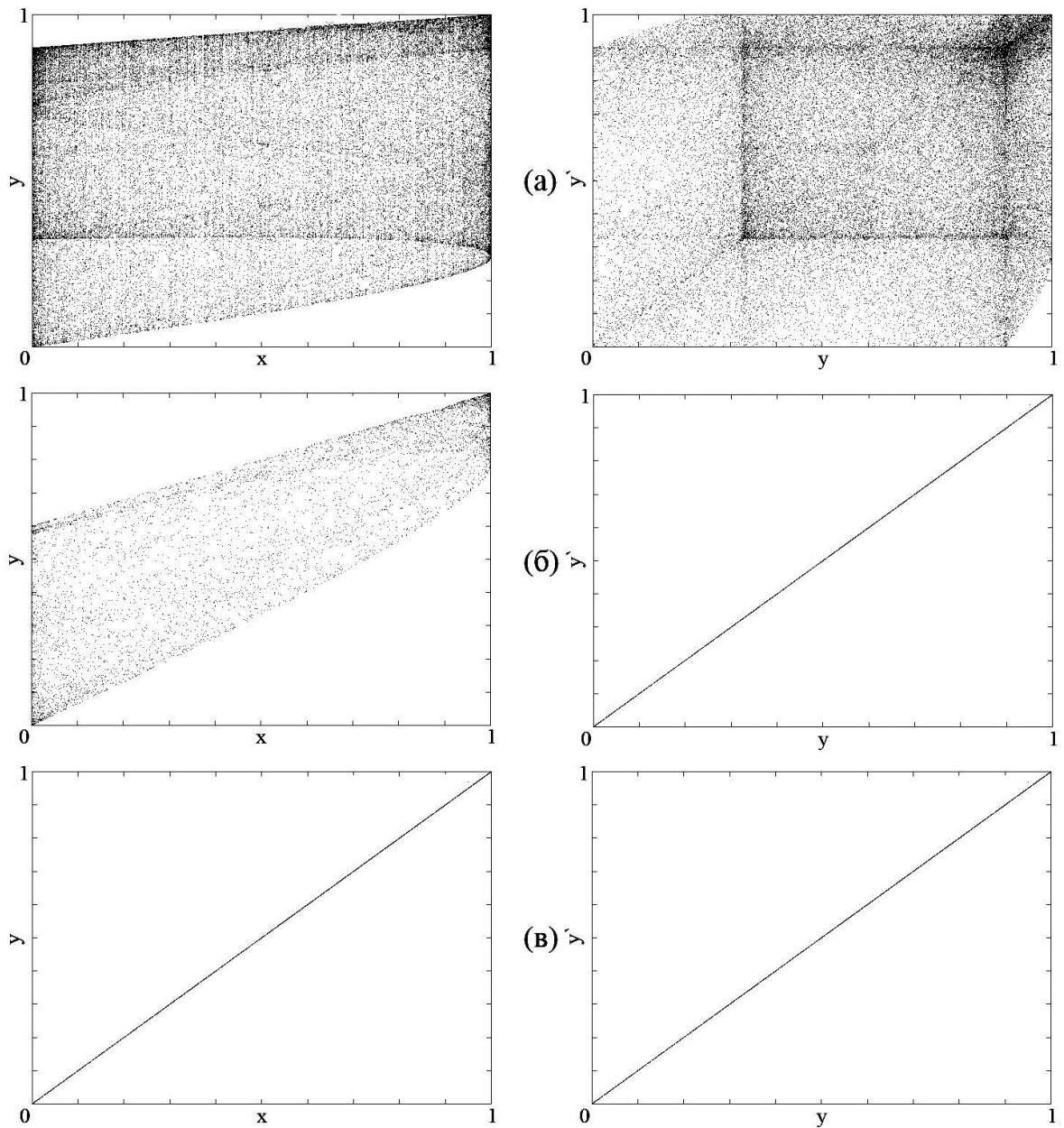


Рисунок 1– Фазовые портреты  $x$ - $y$  и  $y$ - $y'$  связанных логистических отображений описанные системой уравнений (5) с  $f(x) = 4ax(1 - x)$  при  $a = 1$  и разными значениями параметра связи  $k$ : (а)  $k = 0.1$ , не синхронизированное состояние; (б)  $k = 0.4$ , слабая синхронизация; (в)  $k = 0.6$ , сильная (обобщённая) синхронизация

### 1.3 Изучение режима обобщенной хаотической синхронизации с помощью показателей Ляпунова

Что касается второго способа диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации, то, как известно, критерием хаоса является наличие положительного старшего показателя Ляпунова, поэтому его определение особенно важно, и в то же время алгоритм расчета сравнительно прост.

Для случая, который разбирался в предыдущем пункте, рассчитывалось два показателя Ляпунова. Нормальный показатель Ляпунова  $\lambda^R$  (6) определяет стабильность инвариантного многообразия  $y - y'$ , а трансверсальный показатель Ляпунова  $\lambda_0$  (7) определяет стабильность инвариантного многообразия  $x - y$ .

$$\lambda^R = \ln(1 - k) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(y(i))| \quad (6)$$

$$\lambda_0 = \ln(1 - k) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x(i))| \quad (7)$$

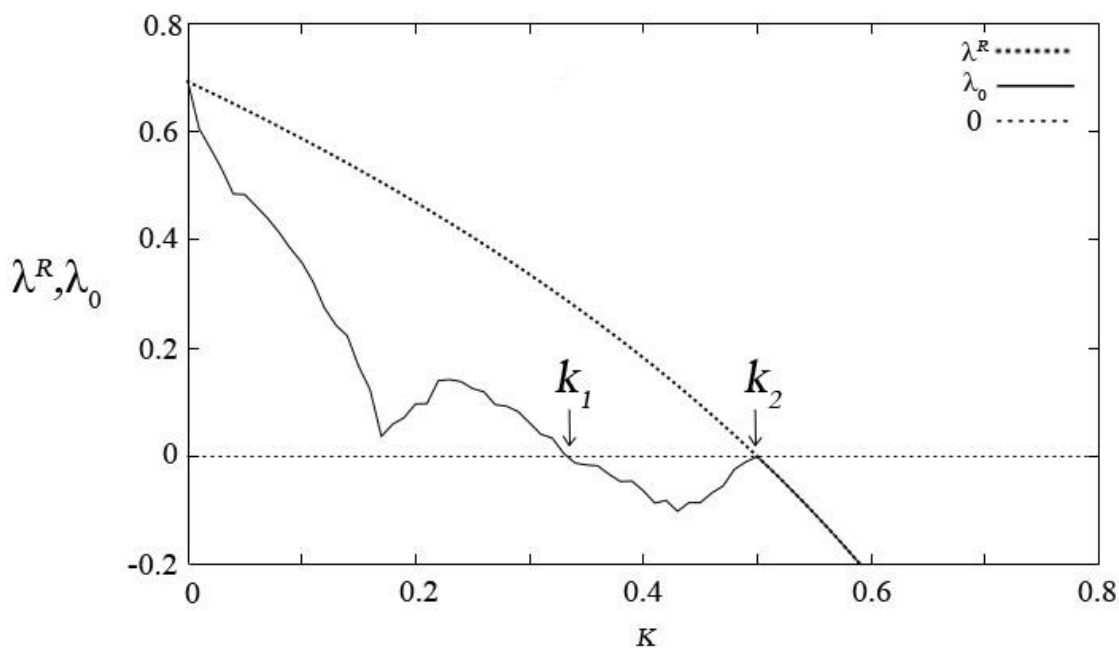


Рисунок 2 – Зависимость нормального  $\lambda^R$  и трансверсального  $\lambda_0$  показателя Ляпунова от параметра связи  $k$

## 2 Изучение сетей логистических отображений

Дальнейшее изучение хаотической синхронизации было произведено на взаимно связанных друг с другом логистических отображениях. Система из пяти  $(x_1, \dots, x_5)$  взаимно связанных друг с другом логистических отображений описана уравнением (8):

$$x_{in+1} = f(x_{in}, a_i) + \varepsilon \sum_j C_{ij} (f(x_{jn}, a_j) - f(x_{in}, a_i)), \quad (8)$$

Для того чтобы выбрать управляющие параметры  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), была построена бифуркационная диаграмма для логистического отображения  $x_{in+1} = f(x_{in}, a_i)$ , представленная на рисунке 4.

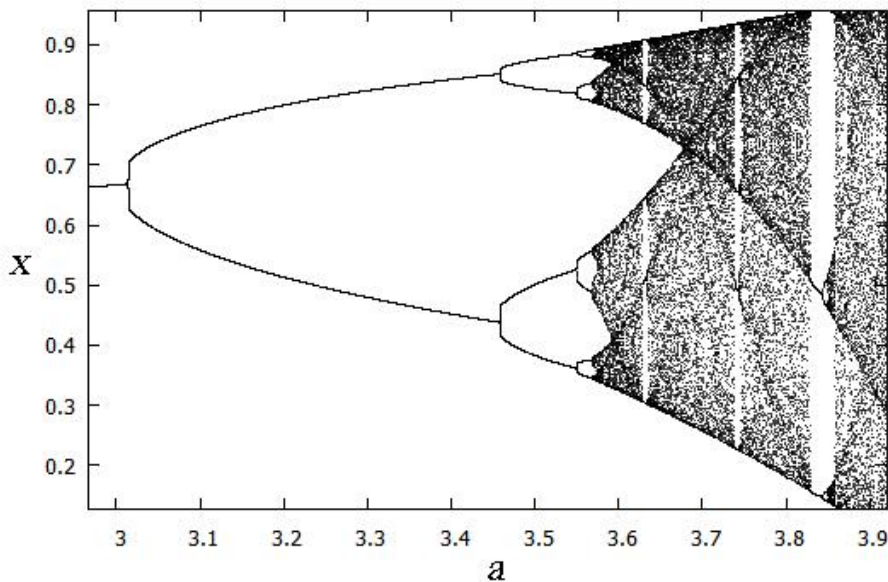


Рисунок 3 – Бифуркационная диаграмма для логистического отображения

$$x_{in+1} = f(x_{in}, a_i).$$

Топология матрицы связи  $C_{all}$  была выбрана таким образом, что каждый элемент связан со всеми остальными:

$$C_{all} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

На рисунке 5 проиллюстрирована топология связи  $C_{all}$ :

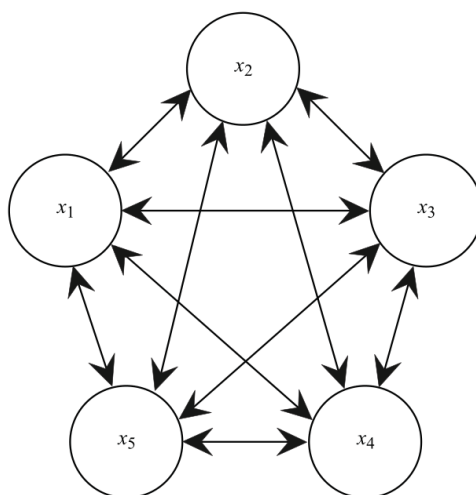


Рисунок 4 – Топология рассматриваемой сети из пяти логистических отображений [15].

На рисунке 6 представлена зависимость пяти показателей Ляпунова для рассматриваемой сети взаимно связанных логистических отображений (8) от величины коэффициента связи  $\varepsilon$ .

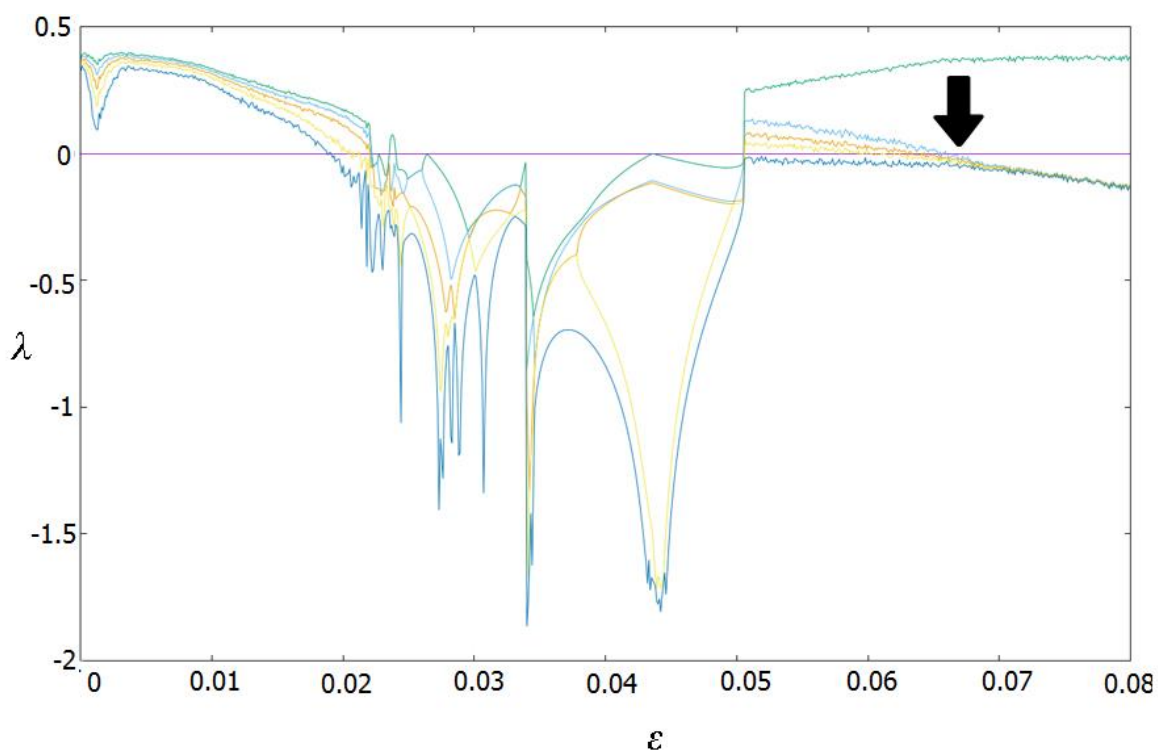


Рисунок 5 – Зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи  $\varepsilon$ .  
Далее были рассмотрены другие топологии связи (10).



$$C_{ground} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C_{random} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

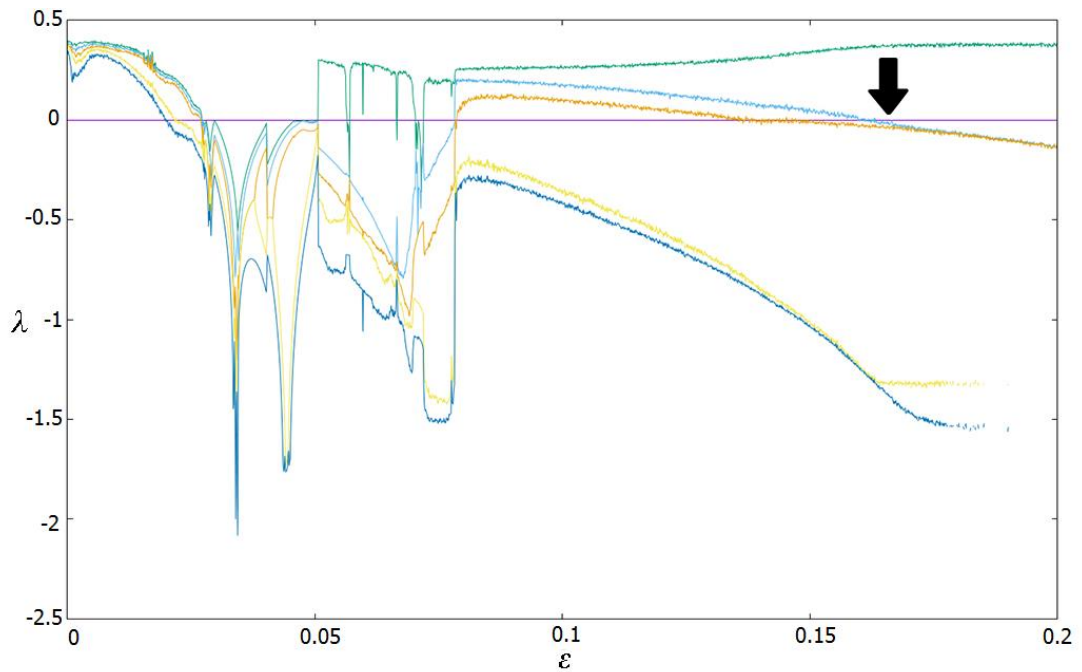


Рисунок 6 – Зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи  $\varepsilon$ , при топологической связи  $C_{ground}$ .

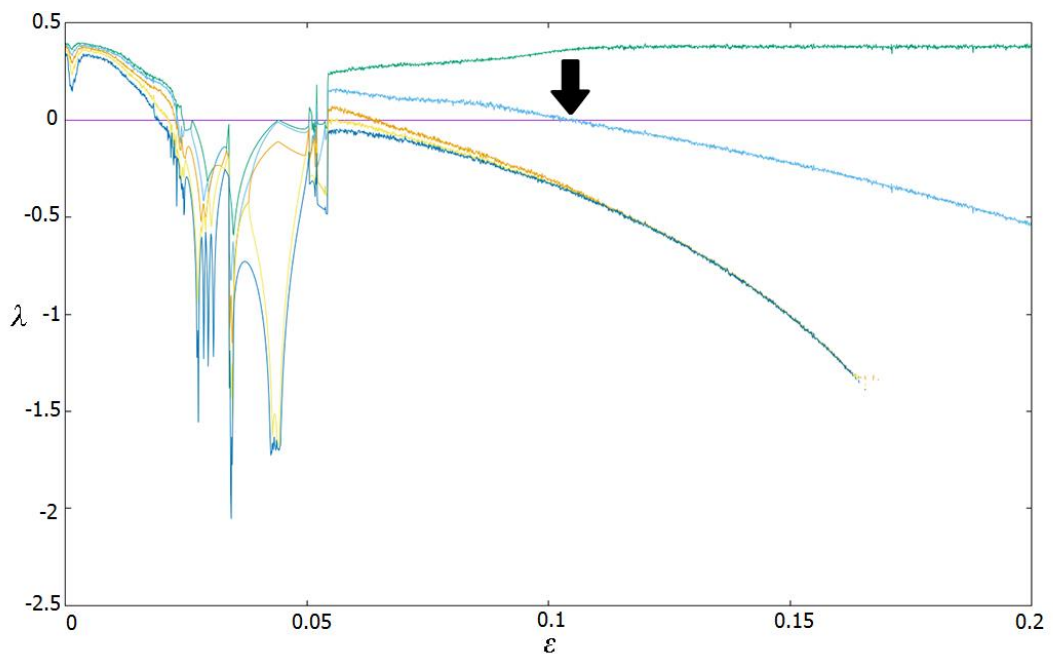


Рисунок 7 – Зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи  $\varepsilon$ , при топологической связи  $C_{random}$ .

Также была рассмотрена сеть логистических отображений состоящая из двадцати пяти элементов представленная на рисунке 9.

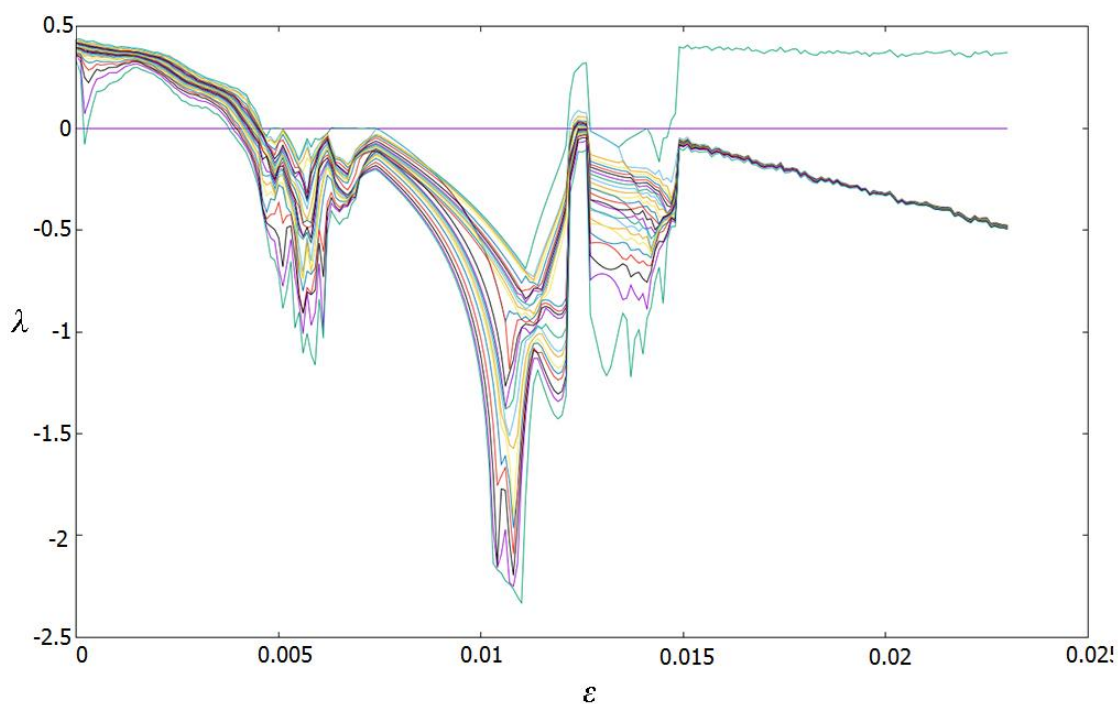


Рисунок 8 – Зависимость двадцати пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи  $\epsilon$ , при топологической связи  $C_{all}$ .

### 3 Диагностика режима фазовой синхронизации в сети Курамото

В качестве объекта для исследования в работе используется сеть фазовых осцилляторов Курамото, предложенная в 1975 г. [16] в качестве математической интерпретации коллективной динамики химических и биологических осцилляторов.

Динамическое состояние  $i$ -го осциллятора данной сети определяется уравнением (9):

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum a_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (9)$$

Исследование сети фазовых осцилляторов Курамото было решено начать с поиска кластеров синхронных элементов, представленных на рисунке 10.

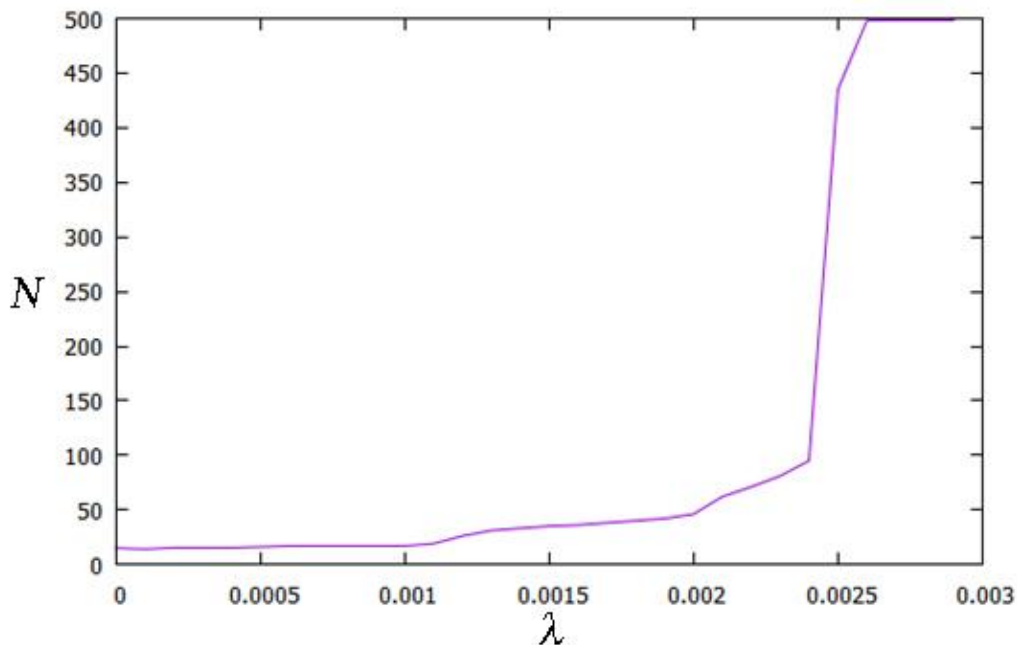


Рисунок 9– Зависимость количества синхронных элементов  $N$  от коэффициента связи  $\lambda$ .

Для диагностики фазовой синхронизации было решено отыскать элемент сети, который первым теряет устойчивость при уменьшении коэффициента связи и рассчитать для этого элемента показатель Ляпунова.

Для элемента сети, который первый перестаёт быть синхронным,  $i = 268$ , при уменьшении коэффициента связи  $\lambda$ , был рассчитан условный показатель Ляпунова  $\bar{\lambda}$ , представленный на рисунке 11.

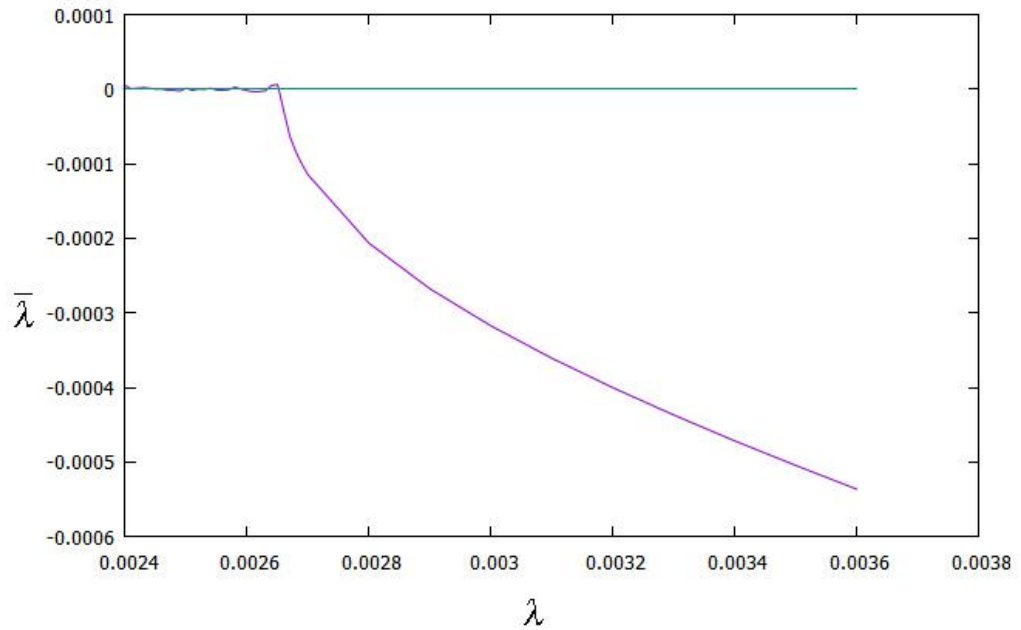


Рисунок 10 – Зависимость условного показателя Ляпунова  $\bar{\lambda}$  от коэффициента связи  $\lambda$

Также было решено построить аппроксимирующую кривую, соответствующую отрицательной части зависимости условного показателя Ляпунова  $\bar{\lambda}$  от коэффициента связи  $\lambda$ . Выяснилось, что данная кривая представляет собой зависимость, представленную на рисунке 12 и имеет вид:  $\lambda = -0.0171259\sqrt{x}$ .

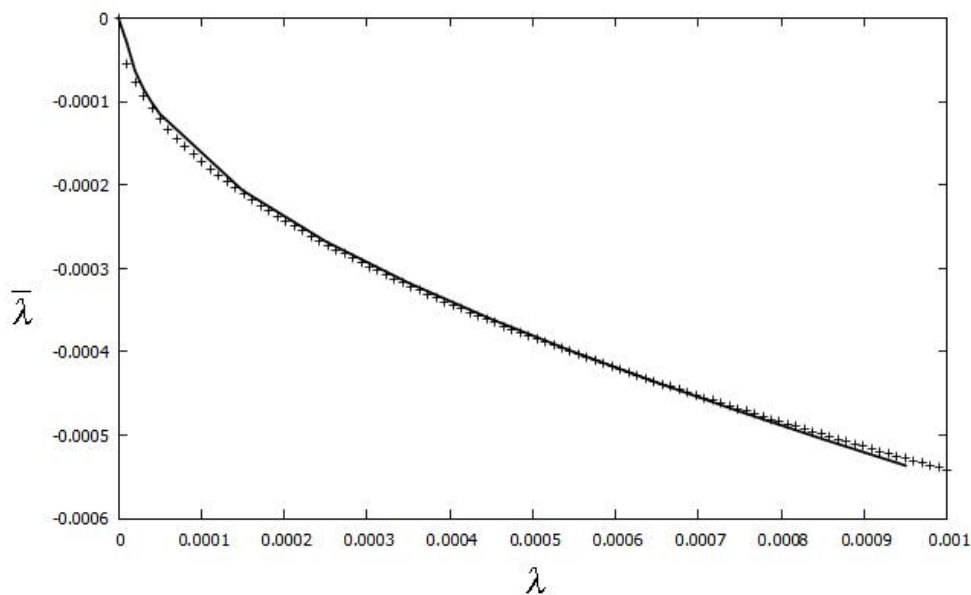


Рисунок 11 – Аппроксимация зависимости условного показателя Ляпунова  $\bar{\lambda}$  обозначена точками (+), а численно полученные значения – сплошной линией.

## Заключение

В ходе данной выпускной квалификационной работы была изложена основная теория, необходимая для знакомства с явлением хаотической синхронизации. Были рассмотрены два метода диагностики режима хаотической синхронизации: метод вспомогательной системы и вычисление показателя Ляпунова. С помощью представленных методов исследовалась система однонаправленно связанных осцилляторов. Было установлено, что явлению обобщённой синхронизации предшествует режим слабой синхронизации между ведомой и вспомогательной системой. Из результатов, полученных двумя методами, было решено в следующих разделах выпускной работы использовать показатель Ляпунова как инструмент диагностики хаотической синхронизации ввиду его наглядности полученных результатов.

Дальнейшее изучение хаотической синхронизации проводилось для сетей логистических отображений. Были рассмотрены сети, состоящие из пяти и двадцати пяти связанных логистических отображений, а также были рассмотрены различные топологии связи для системы, состоящей из пяти элементов:  $C_{all}$ ,  $C_{round}$  и  $C_{random}$ . Были рассчитаны зависимости Ляпуновских показателей для данных систем, с помощью которых можно наглядно видеть процесс наступления обобщённой синхронизации. Для различных топологий связей получились различные зависимости Ляпуновских показателей, каждый из которых представляет собой особый предмет исследований.

Также был исследован режим фазовой синхронизации в сети осцилляторов Курамото. Было показано, что режим фазовой синхронизации в системе, состоящей из большого числа элементов можно диагностировать с помощью одного определённого элемента, который первым перестаёт быть синхронным при разрушении синхронного режима. Таким образом, рассчитав условный показатель Ляпунова для данного элемента, можно диагностировать режим фазовой синхронизации в сети осцилляторов Курамото.

1. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization of chaotic systems // *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.* 2015. Vol. 25, № 9. P. 97611.
2. Dmitriev B.S. et al. First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, № 7.
3. Kittel A., Parisi J., Pyragas K. Generalized synchronization of chaos in electronic circuit experiments // *Phys. D Nonlinear Phenom.* 1998. Vol. 112, № 3–4. P. 459–471.
4. Wennekers T., Pasemann F. Generalized types of synchronization in networks of spiking neurons // *Neurocomputing.* 2001. Vol. 38–40. P. 1037–1042.
5. Киселев А.Р. et al. Внутренняя синхронизация основных 0.1 Гц-частотных ритмов в системе вегетативного управления сердечно-сосудистой системой // *Физиология человека.* 2007. Vol. 33, № 2. P. 69–75.
6. Fell J., Axmacher N. The role of phase synchronization in memory processes. // *Nat. Rev. Neurosci.* 2011. Vol. 12, № 2. P. 105–118.
7. Landsman A.S., Schwartz I.B. Complete chaotic synchronization in mutually coupled time-delay systems // *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 2007. Vol. 75, № 2.
8. Lee D. et al. Generalized phase synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67, № 4. P. 45201.
9. Uchida A. et al. Generalized synchronization of chaos in identical systems with hidden degrees of freedom. // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, № 17. P. 174101.
10. Кузнецов С.П. Динамический хаос. 2001. № 0. 1-11 p.
11. Pikovsky A., Rosenblum M.G., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences // *Book.* 2001. 432 p.
12. Rulkov N.F. et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 2. P. 980–994.
13. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528–4535.

14. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 5. P. R4508–R4511.
15. Короновский А.А., Москаленко О.И., Пивоваров А.А. Установление обобщенной синхронизации в сети логистических отображений // Письма в ЖТФ. 2015. Vol. 41, № 16. P. 1–7.
16. Cooray G. The Kuramoto Model // Leonardo. 2008. № September.