

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Устройство бассейнов притяжения слабодиссипативных отображений и
его эволюция при изменении параметров**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 214 группы

направления 03.04.01 Прикладные математика и физика

Факультета нелинейных процессов

Лиманского Константина Валерьевича

Научный руководитель

доцент КФОС, к.ф.-м.н _____

Савин Д. В.

Зав. кафедрой физики

открытых систем

проф., д-р физ.-мат. наук _____

А.А. Короновский

Саратов 2017 г.

Введение

Данная работа посвящена исследованию динамики фазового пространства околоконсервативных отображений Икеды и Эно. Известно, что в дискретных отображениях в случае малой диссипации может сосуществовать большое количество аттракторов [1-3]. Системы, обладающие множеством устойчивых состояний при определённом значении параметра, называются мультистабильными. Явление мультистабильности в теории динамических систем встречается в широком спектре моделей разной природы, как искусственно сконструированных, так и реалистичных: возникающих в контексте исследования динамики метаболических систем [4], в нелинейной оптике, в том числе в экспериментальных наблюдениях в системе газового лазера с модуляцией добротности [5], в различного рода электронных схемах [6] и т.п.

Отличие консервативных систем от диссипативных, как известно, заключается в том, что для консервативных систем фазовый объём сохраняется, а для диссипативных нет, что приводит к наличию в диссипативной системе притягивающих множеств в фазовом пространстве – аттракторов [7]. Фазовое пространство Гамильтоновой системы представляет собой набор островков периодичности - эллиптических неподвижных точек, располагающихся внутри этих островков, и периодических траекторий, огибающих их [8, 9], — между которыми располагается "*хаотическое море*" (оно выглядит как множество точек, которые располагаются беспорядочным образом). При введении в такую систему диссипации происходят следующие изменения фазового пространства: эллиптические неподвижные точки становятся устойчивыми и превращаются в аттракторы, а хаос превращается в переходные хаотические движения траекторий, стремящихся достигнуть своих фокусов. В свою очередь аттракторы обладают *бассейнами притяжения*. Это такая область, любая точка из которой при стремлении времени к бесконечности обязательно сойдётся к аттрактору данного

бассейна. Устройство бассейнов притяжения слабодиссипативных мультистабильных систем, в частности, дискретных отображений, и их эволюция при изменении параметра диссипации изучалась рядом исследователей [10, 11]. Представляет интерес также их эволюция при постоянном (малом) уровне диссипации и изменении параметра нелинейности, отвечающего в системе за удвоения периода. Изучение этого процесса и является задачей настоящей работы.

Так как бассейны притяжения аттракторов обладают фрактальной структурой, в качестве количественной характеристики устройства фазового пространства можно использовать их фрактальную размерность, и с целью изучения устройства границ бассейнов притяжения следить за её изменениями при изменении управляющего параметра.

Работу организована следующим образом. Первая глава посвящена обзору работ, посвящённых изучению различных особенностей и свойств, которыми обладают мультистабильные системы с околосервированной динамикой. Во второй главе изложены результаты исследования бассейнов притяжения отображений Эно и Икеды при увеличении управляющего удвоениями периода параметра. Третья глава содержит результаты расчёта фрактальной размерности границ бассейнов притяжения отображений Эно и Икеды в диапазонах управляющего параметра, отвечающих наличию сосуществующих периодических аттракторов.

Мультистабильность и её основные свойства

В первой главе рассматриваются разнообразные области науки, в которых встречаются системы с мультистабильным поведением. Это говорит о том, что изучение и исследование мультистабильности является достаточно важной и актуальной частью нелинейной динамики. Так же рассматриваются 4 основных класса систем, в которых мультистабильность проявляется при различных условиях и может приводить к разнообразным последствиям. Обзор основных свойств слабодиссипативных систем, таких как высокомультистабильное поведение, сложное устройство границ бассейнов притяжения, свойство Вада, кризис аттрактора, конечное число периодических состояний демонстрируется на примере отображений ротора и Икеды. Данные системы интересны тем, что при малом уровне диссипации обладают большим числом устойчивых периодических траекторий или аттракторов, число которых в свою очередь зависит от величины, отвечающей за диссипацию в системе.

Фазовое пространство отображений Эно и Икеды в случае слабой диссипации

Исследуемые отображения Эно и Икеды могут быть записаны в виде двумерных систем рекуррентных соотношений (1) и (2) соответственно. Параметр a – параметр нелинейности (управляющий), b – параметр, отвечающий за диссипацию в системе.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = a + bx_n^2 \cos(x_n^2 + y_n^2 + \varphi_0) - by_n^2 \sin(x_n^2 + y_n^2 + \varphi_0) \\ y_{n+1} = by_n^2 \cos(x_n^2 + y_n^2 + \varphi_0) + bx_n^2 \sin(x_n^2 + y_n^2 + \varphi_0) \end{cases} \quad (2)$$

На рис.1 изображены бассейн аттрактора периода 1 (изображён жёлтым цветом) - бассейн главного аттрактора, данный бассейн занимает большую часть фазового пространства, внутри него располагаются бассейны побочных аттракторов, в данном случае это бассейны периода 5 (изображены красным цветом). Вблизи значения параметра нелинейности $a = 2.3818$ размер бассейнов побочных аттракторов периода 5 много меньше бассейна основного аттрактора периода 1, но при увеличении параметра a бассейны побочных аттракторов растут и около значения параметра нелинейности $a = 2.5543$ они достигают своих около-максимальных размеров, сравнимых с размером бассейна основного аттрактора. После этого бассейны побочных аттракторов уменьшаются и исчезают. Так же можно заметить, что общая структура бассейнов располагается в некоторой области, изображаемой светло-зелёным цветом. Это область «разбегания траекторий», также говорят, что такое отображение имеет «аттрактор на бесконечности». Это означает, что любая точка, попавшая в эту область, «убегает» на бесконечность. Данная область отсутствует у отображения Икеды (рис.3).

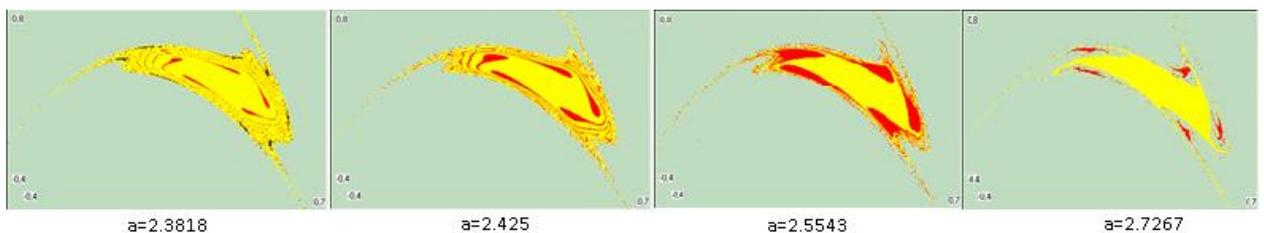


Рис.1 Бассейны притяжения отображения Эно (1) для значения параметра $b = 0.99$

На рис.2 изображена эволюция бассейнов отображения Икеды, которая демонстрирует схожую динамику. Для исследование данного явления были произведены расчёты фрактальной размерности во всём интервале существования побочных аттракторов.

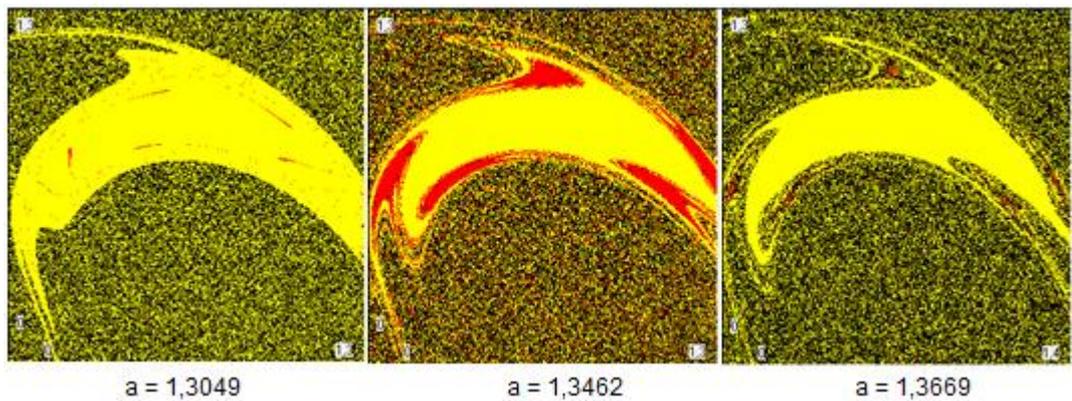


Рис.2 Бассейны притяжения отображения Икеды (2) для значения параметра $b = 0.99$

Фрактальная размерность границ бассейнов притяжения аттракторов.

У мультистабильных систем присутствует сильная чувствительность к начальным условиям, при которой может произойти так, что при небольшом их изменении траектории могут сойтись на другой аттрактор [1]. В связи с этим полезным является анализ устройства границ бассейнов притяжения. Так как они в большинстве случаев обладают фрактальной структурой, в качестве количественной характеристики устройства фазового пространства можно использовать их фрактальную размерность. С целью изучения устройства бассейнов притяжения аттракторов будем следить за её изменениями при изменении управляющего параметра.

Расчёт *эффективной фрактальной размерности* может быть выполнен с помощью расчёта показателя неопределенности. Для этого нужно подсчитать долю начальных условий $f(\varepsilon)$, изменивших свои бассейны притяжения под действием начального возмущения ε для разных значений ε . Тогда можно записать зависимость в виде:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}, \quad (3)$$

где α – показатель, равный разности размерностей фазового пространства и размерности границы бассейна притяжения, а $f(\varepsilon)$ называется *функцией неопределённости* [12].

Скажем несколько слов об алгоритме расчёта фрактальной размерности. Для расчёта фрактальной размерности необходимо работать с сеткой начальных условий $[x_i, y_i]$. Для каждого начального условия данной сетки производится несколько тысяч итераций отображения до выхода в установившийся режим. После этого к исходным начальным условиям добавляется некоторое малое возмущение, сетка начальных условий принимает вид $[x_i+\varepsilon, y_i]$, и снова отображение итерировуется. Далее производится подсчёт доли начальных условий, которые при добавления возмущения сменили аттрактор. После этого процедура повторяется для следующего значения возмущения ε . В результате получается зависимость доли начальных условий $f(\varepsilon)$, сменивших свои аттракторы от величины возмущения ε . Данная зависимость аппроксимируется прямой. В результате значение фрактальной размерности вычисляется как разность размерности фазового пространства, в нашем случае $D=2$, и тангенса угла наклона аппроксимирующей прямой.

В нашей работе величина возмущения ε задавалась в диапазоне 10^{-12} - 10^{-5} . Максимальный размер сетки начальных условий, используемый для расчётов был $[600 \times 600]$. Сетки задавались из следующих соображений: если размер исследуемой области фазового пространства $[(x_a; y_a) \times (x_b; y_b)]$, тогда шаг сетки задавался как $d_x = \frac{x_b - x_a}{n}$ и $d_y = \frac{y_b - y_a}{n}$, где $d_{x,y}$ – шаг сетки по x и y , а n – размер сетки, т.е. количество начальных условий по каждой из координат. Для каждого значения возмущения отображение итерировалось несколько десятков тысяч раз. При вычислении фрактальной размерности так же определялась погрешность расчёта, или дисперсия, по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\sum (f(x_i) - f(X_i))^2}{n}, \quad (4)$$

где $f(x_i)$ – значение функции неопределённости в текущей точке, $f(X_i)$ – значение функции в i -той точке аппроксимирующей прямой, рассчитанной по методу наименьших квадратов, n - число точек вычислений

Расчёт фрактальной размерности границ бассейнов притяжения отображения Эно

В данном разделе представлены результаты расчётов зависимостей фрактальной размерности для отображения Эно. Будем рассматривать только случаи слабой диссипации. Для отображения Эно параметр диссипации соответственно $b = 0.99, 0.999$, для отображения Икеды - $0,9$ и $0,99$. Диапазоны построения зависимостей будут соответствовать интервалам существования побочных аттракторов, рассмотренных во второй главе.

На рис.3-6 представлены бассейны притяжения побочных аттракторов, бифуркационная диаграмма, построенная в интервале существования данных аттракторов, а так же зависимость фрактальной размерности границ данных бассейнов притяжения от управляющего параметра. На рис.3 исследуются бассейны притяжения аттракторов периода 5, на рис.4 - периода 8, на рис.31 - периода 5, на рис.6 - периода 7. Зависимости фрактальной размерности, изображённые на данных рисунках получены для квадратных сеток начальных условий, выбираемых в диапазоне 200-600 для одной координаты.

Можно заметить, что пики на графиках соответствуют в фазовом пространстве появлению дополнительных побочных аттракторов более высоких периодов либо их исчезновению (рис.5в3, рис.6в2, рис.8в2, рис.10в2).

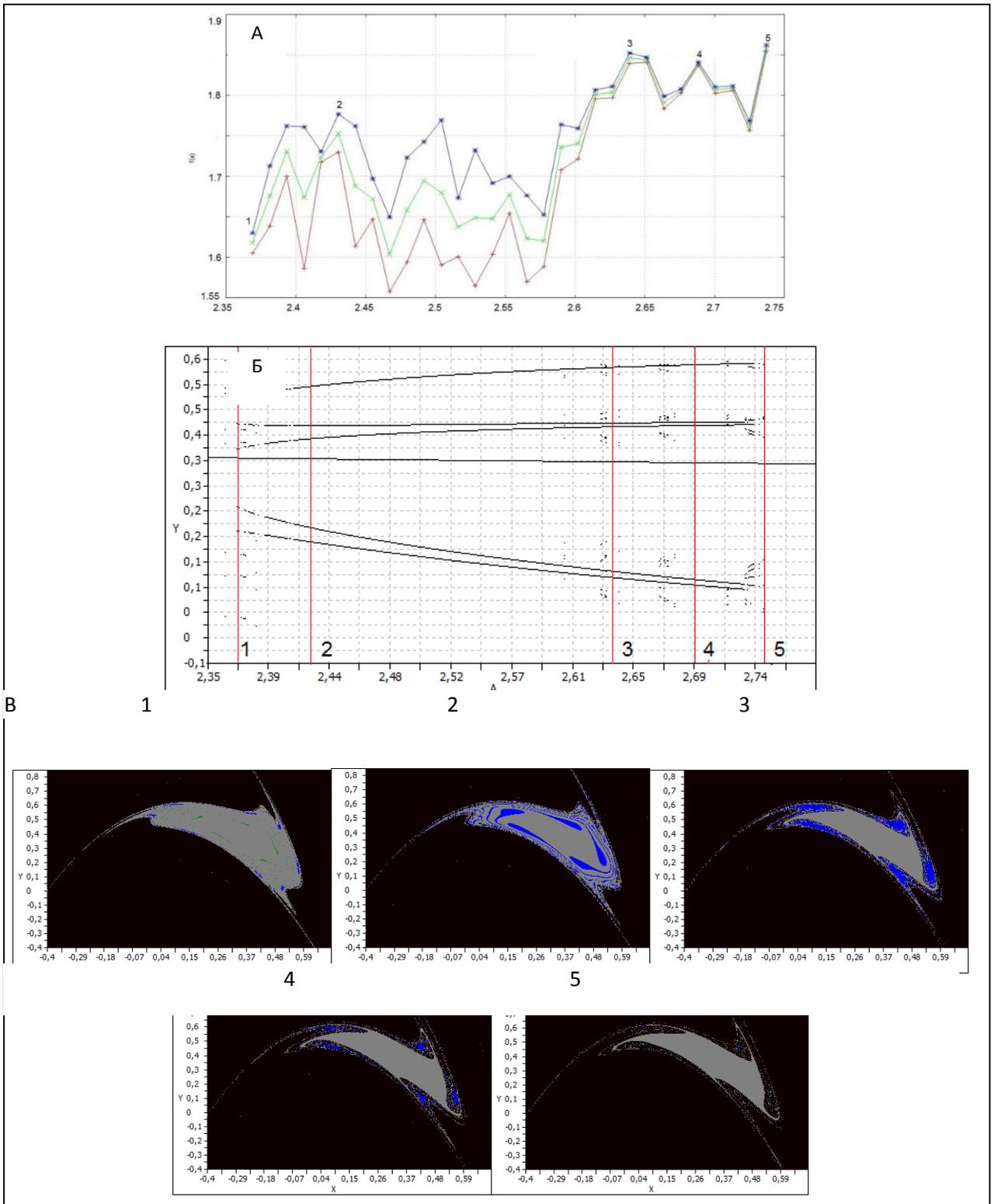


Рис.3 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Эно(5), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3-4-5 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.99$

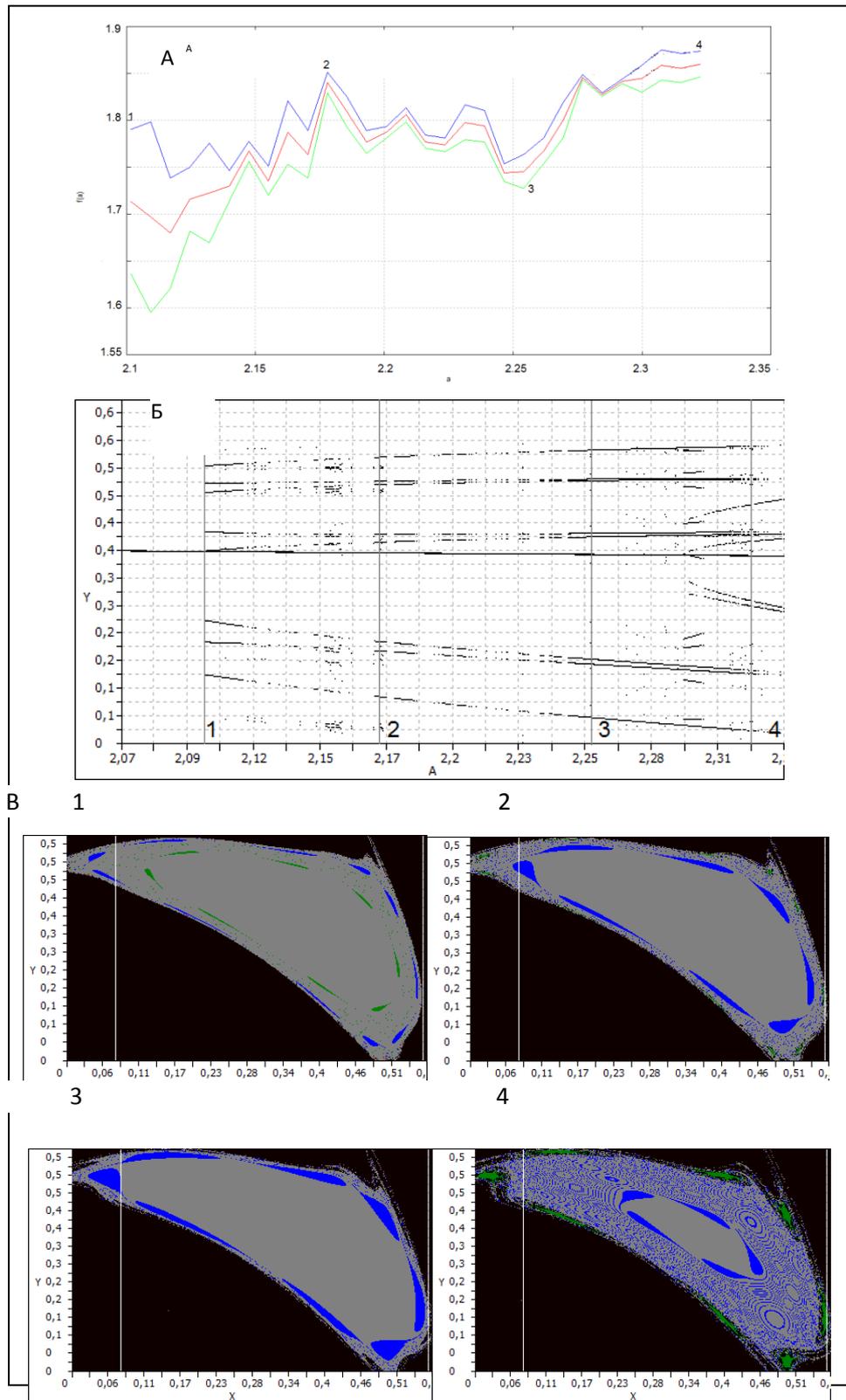


Рис.4 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Эно(5), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3-4 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.999$

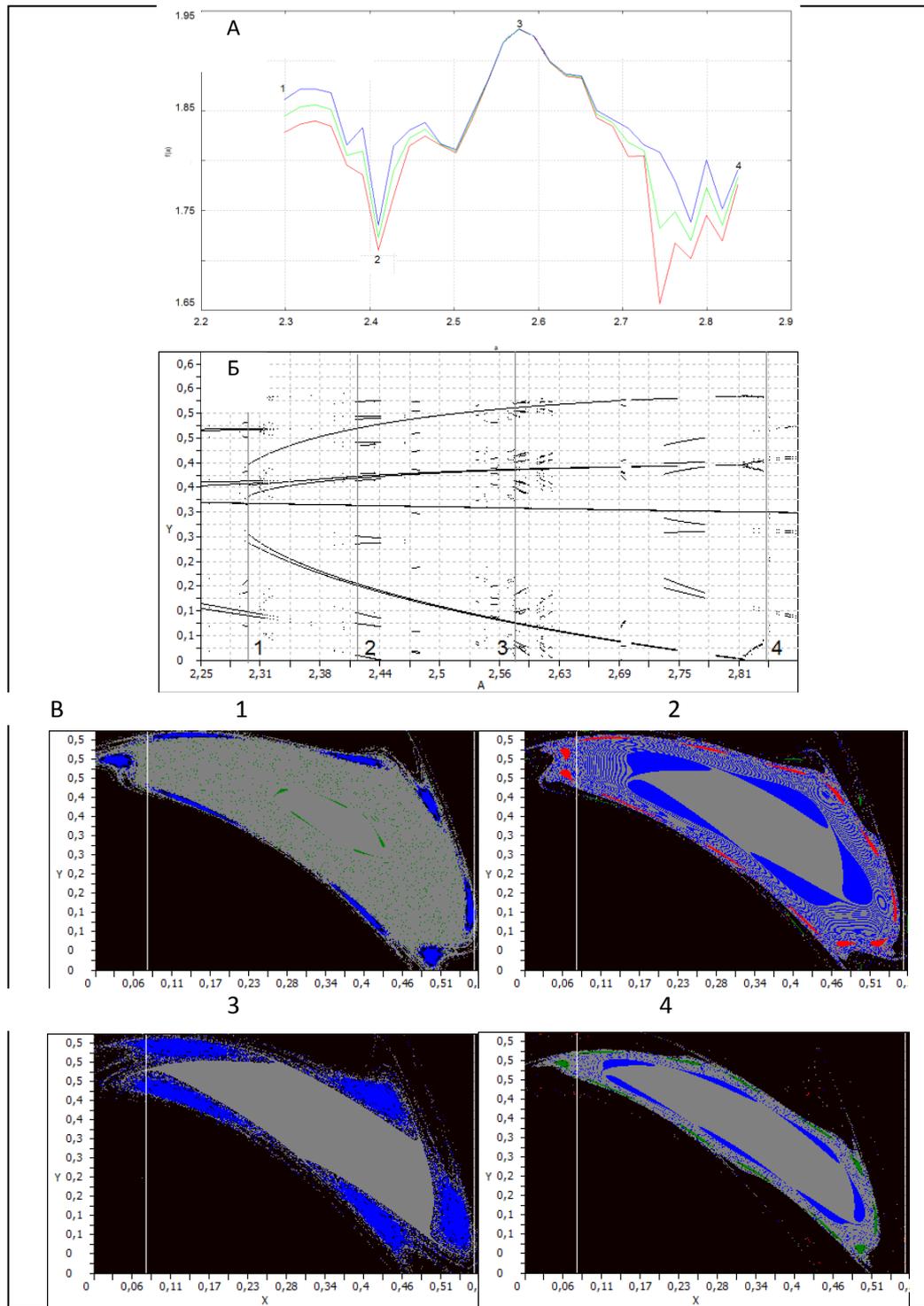


Рис.5 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Эно(5), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3-4 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.999$

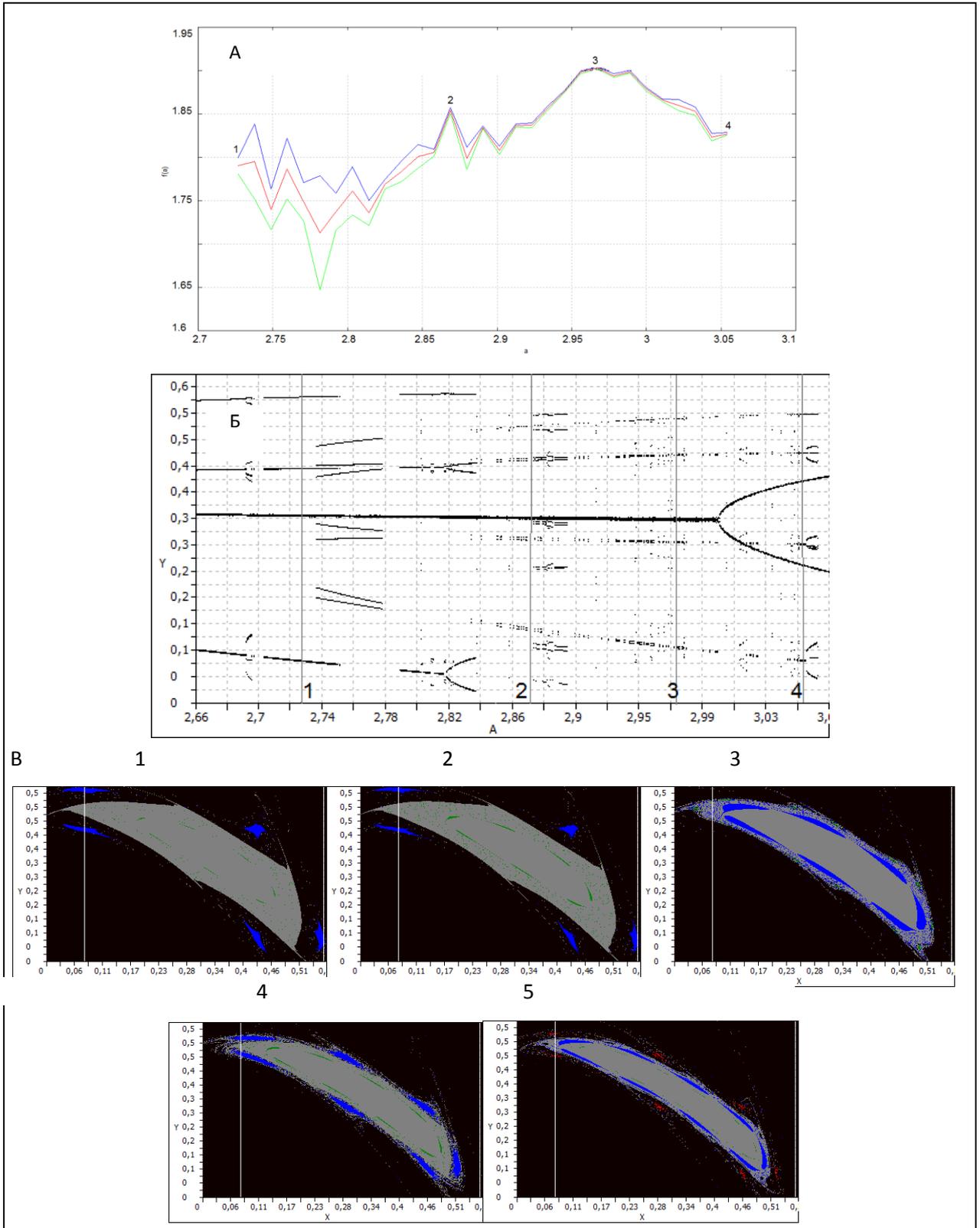


Рис.6 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Эно(5), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3-4-5 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.999$

Расчёт фрактальной размерности границ бассейнов притяжения Отображения Икеды

На следующих рисунках 7-9 изображены зависимости фрактальной размерности для диапазона существования некоторых побочных аттракторов отображения Икеды, бифуркационные диаграммы, построенные для выбранного интервала, а так же бассейны притяжения данных аттракторов. Зависимости фрактальной размерности так же как и для отображения Эно, получены для квадратных сеток начальных условий, выбираемых в диапазоне 200-600 для одной координаты.

Общая картина графиков фрактальной размерности такая же как и отображения Эно. На рис. 8 у характеристики фрактальной размерности преобладает ярко выраженные пики, и если посмотреть на бассейн притяжения при данном значении управляющего параметра, то можно увидеть, что вокруг побочных бассейнов появляются ещё маленькие побочные бассейны. Так же стоит отметить, что в окрестности пиков размерности существенно меньше дисперсия.

Случай на рис.8 является самым интересным примером из всех выше представленных результатов для отображении Икеды, т.к эволюция этих бассейнов обладает ещё одной отличительной чертой. А именно, область бассейна основного аттрактора становится сравнимой с размером побочных бассейнов на 1 рисунке, т.е становится значительно меньше, в свою очередь бассейны побочных аттракторов наоборот сильно увеличиваются и начинают занимать большую область чем основной бассейн. Это явление отражается на графике фрактальной размерности характерным пиком (точка 2 на рис.8а и рис.8в2).

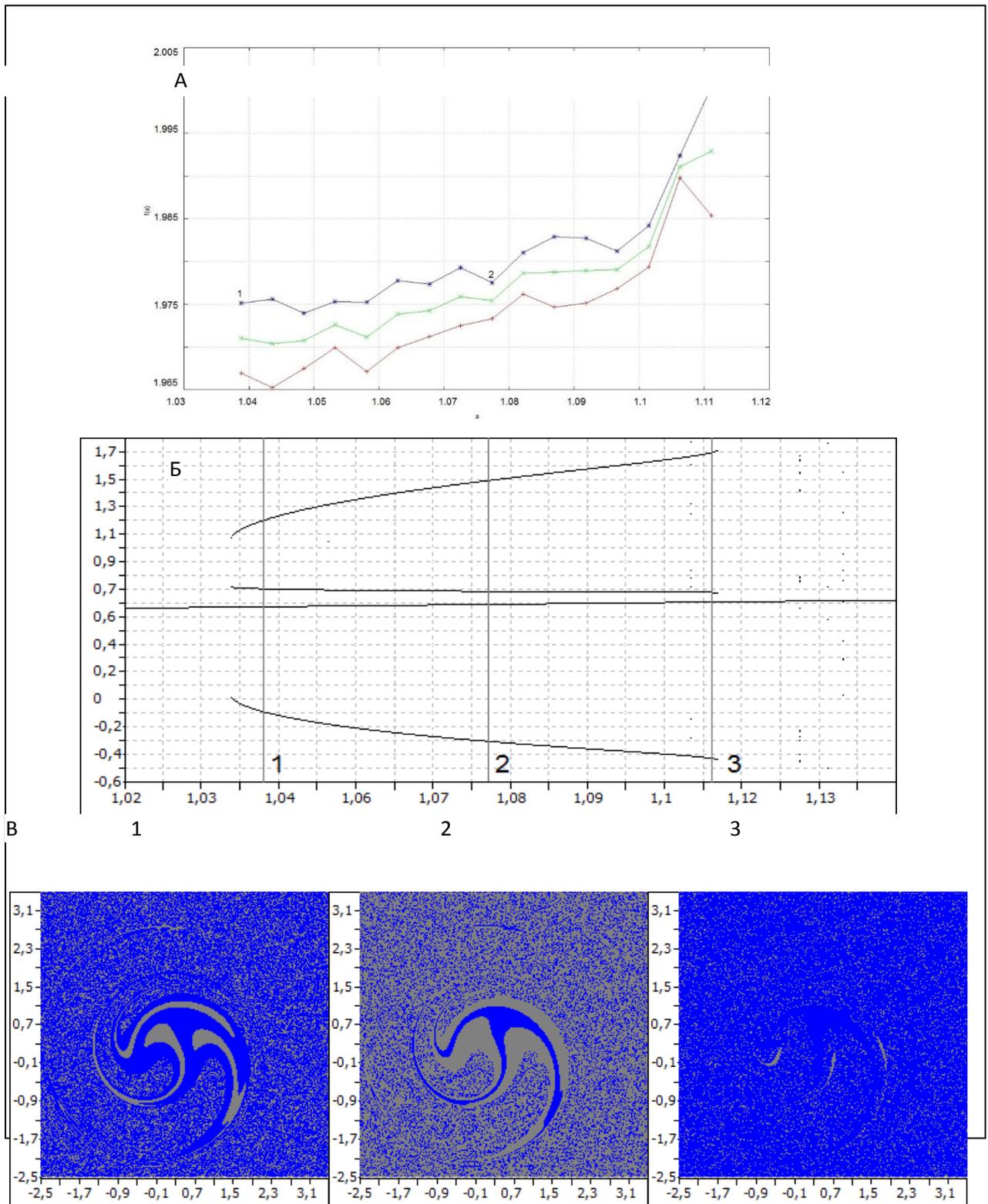


Рис.7 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Икеды(3), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.9$

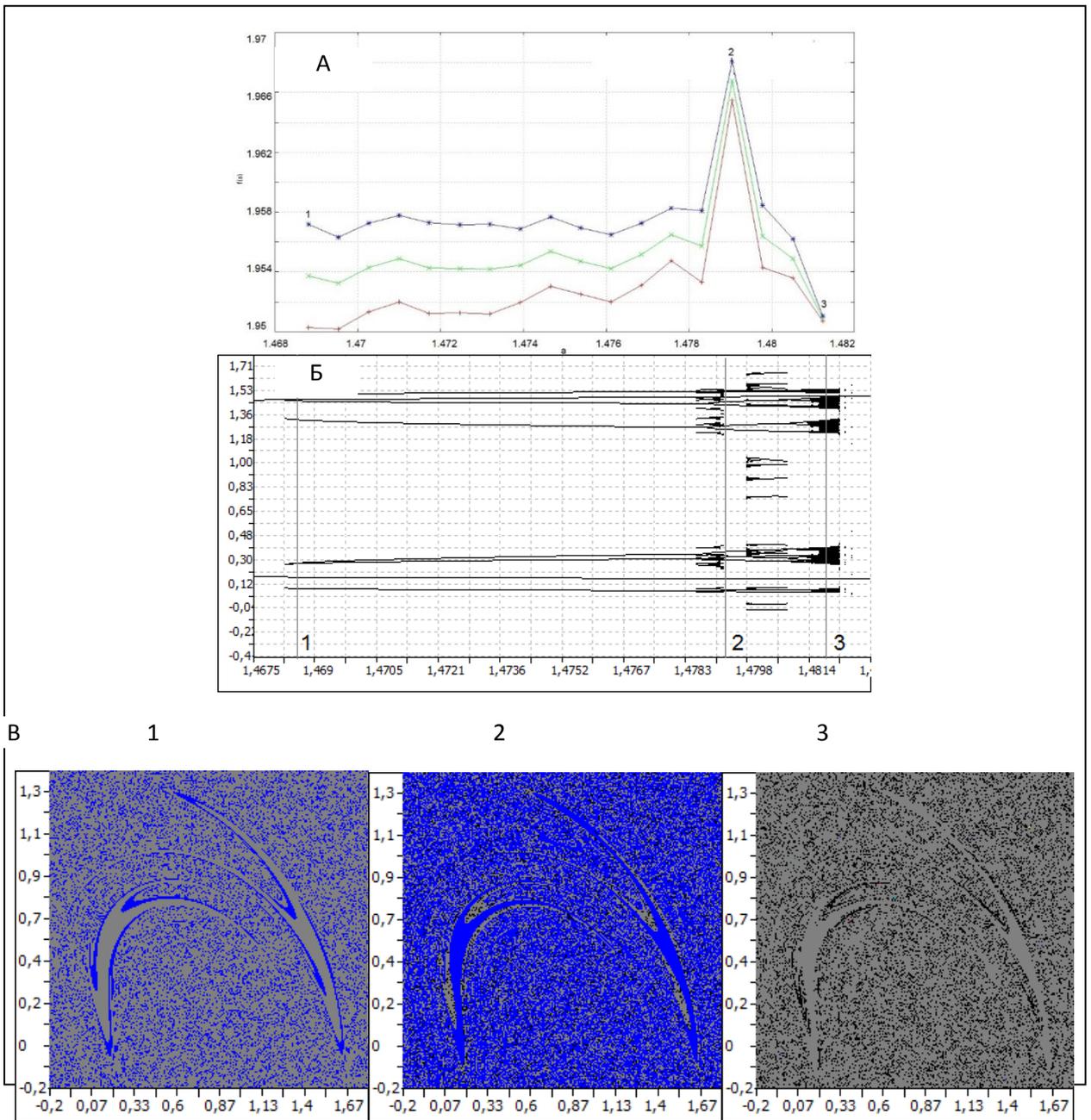


Рис.8 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Икеды(3), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.9$

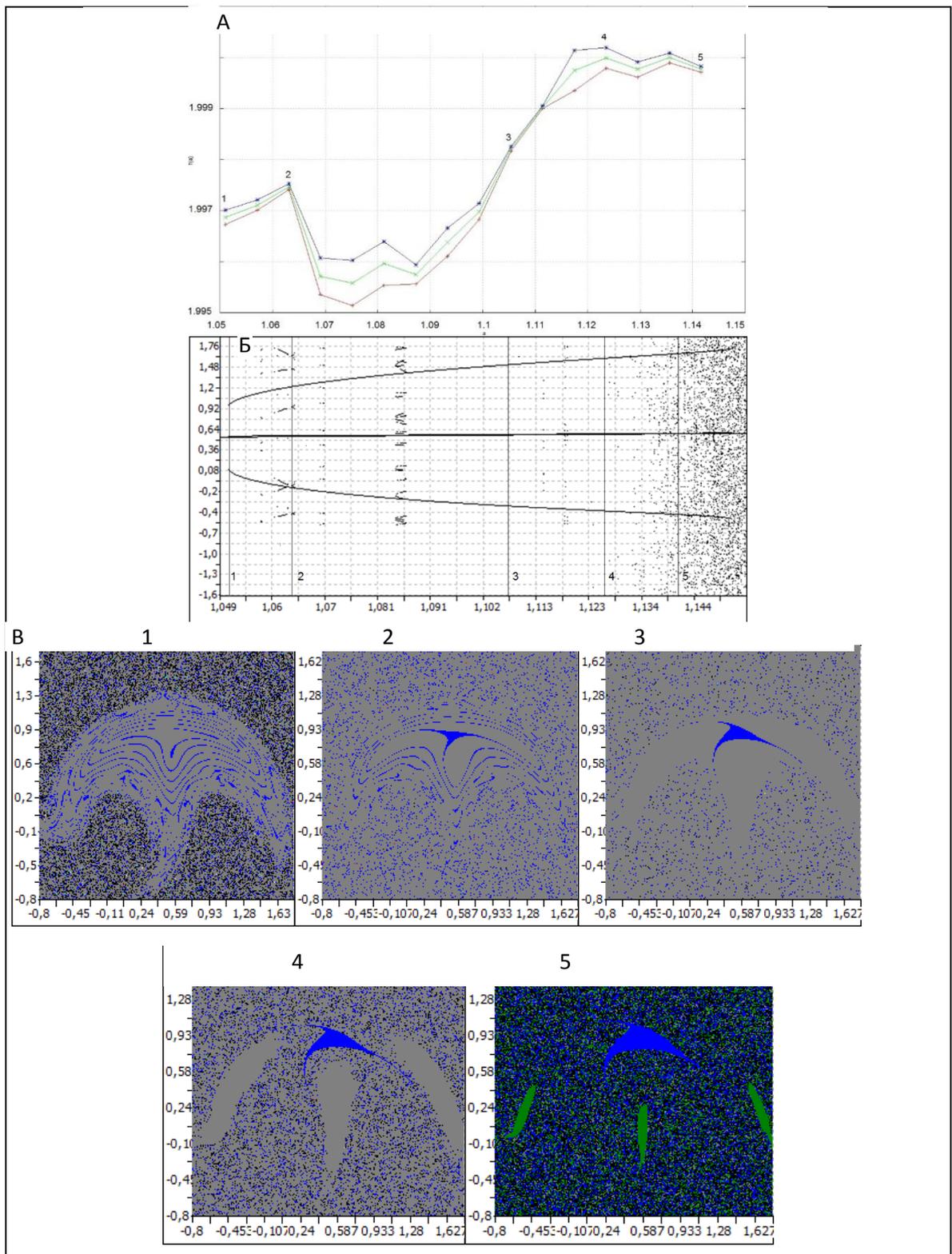


Рис.9 А) Зависимость фрактальной размерности отображения Икеды(3), а так же её верхняя и нижняя погрешности вычисления . Б) Бифуркационная диаграмма. В) Бассейны притяжения аттракторов, построенные в точках, отмеченных цифрами 1-2-3-4-5 на бифуркационной диаграмме. Диапазоны построения зависимости фрактальной размерности и бифуркационной диаграммы совпадают. Параметр $b=0.99$

По полученным результатам можно отметить, что наблюдается значительные скачки значения фрактальной размерности в области скопления всевозможных побочных сосуществующих аттракторов.

В заключение можно сделать следующие выводы: общая картина зависимостей фрактальных размерностей такова, что по ходу увеличения управляющего параметра расчёт число пиков размерности, которые в свою очередь соответствуют скоплению аттракторов более высоких периодов или же их исчезновению. В большинстве случаев в окрестности пика размерности существенно меньше дисперсия.

Заключение

В ходе выполнения работы были рассмотрены свойства слабодиссипативных мультистабильных систем, в частности, исследована зависимость структуры их бассейнов притяжения от значений параметра нелинейности. Исследование проводилось на примере отображений Эно и Икеды.

Можно заключить, при увеличении параметра нелинейности внутри интервала сосуществования аттракторов вплоть до некоторого значения происходит рост области фазового пространства, занятого побочными бассейнами притяжения. В итоге масштабы бассейнов притяжения главного и побочных аттракторов становятся соизмеримы, после чего при дальнейшем увеличении параметра бассейны побочных аттракторов резко уменьшаются и «схлопываются». Однако, в отображении Икеды бассейн основного аттрактора после гибели побочных восстанавливает свой размер, чего не происходит у *отображения Эно*. Это происходит из-за того, что у отображении Икеды отсутствует «аттрактор на бесконечности».

Зависимости фрактальных размерностей границ бассейнов притяжения внутри рассматривавшихся интервалов у исследуемых отображений проявили схожие характеристики. Так, почти у всех зависимостей по ходу увеличения управляющего параметра наблюдаются пики значений размерности, которые соответствуют скоплению аттракторов более высоких периодов или же их исчезновению. В большинстве случаев в окрестности пика размерности существенно меньше дисперсия.

Литература

1. Feudel, U. Complex dynamics in multistable systems. / *U. Feudel* // International Journal of Bifurcation and Chaos – 2008 – V. 18 – № 6 – P. 1607–1626.
2. Feudel, U. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. / U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt, J. A. Yorke // *Physical Review E* – 1996 – V. 54 – P. 71–81.
3. Martins, L.C, Gallas, J.A. Multistability ,phase diagrams and statical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos* - 2008 V. 18 - №.6 1705–1717.
4. Knorre, W., Bergter, F., Simon, Z. Multistability in metabolic systems // *Studia Biophysica* - 1975, 81–89.
5. Arecchi, F., Meucci, R., Puccioni, G.. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.*- 1982, 1217–1220
6. Mitesh S. P, Unnati P, Abhijit Sen, Gautam C. Sethia, Chittaranjan H, Syamal K. Dana, Feudel, U, Showalter, K, Calistus N., Ravindra E. A. Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rössler oscillators.// *Physical Review. E* - V.89
7. Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов // М.: Физматлит - 2006.
8. Заславский, Г.М. Стохастичность динамических систем. / Г.М. Заславский // М. «Наука» - 1984
9. Райхл, Л.Е. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах / Л.Е.Райхл // М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика - 2008
10. Rech, P.C, Beims, M.W, Gallas, A. C. Basin size evolution between dissipative and conservative limits / Rech, P.C // *Physical Review E* – 2005 – V.71
11. Mario S. T., Grebogy, C. Basins of Attraction of Periodic Oscillations in Suspension Bridges C./ Mario S. T., Grebogy, C. // *Nonlinear Dynamics* - 2004 - V.37 - P. 207–226,.
12. Christian S, Grebogi, C. Emerging attractors and the transition from dissipative to conservative dynamics / Christian S // *Physical Review E* - 2009 - V.80