

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Бифуркационные механизмы мягкого и жесткого возбуждения
колебаний в генераторах с линией равновесия на основе
мемристора**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы
направления 03.04.03 «Радиофизика»
физического факультета

Корнеева Ивана Александровича

Научный руководитель
ассистент, к.ф.-м.н.

Семенов В.В.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Анищенко В.С.

г. Саратов — 2017

ВВЕДЕНИЕ

Известны три базовых пассивных элемента электрических цепей: резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Теоретическая концепция четвертого базового радиотехнического элемента «мемристор» (memristor) была предложена Леоном Чуа в 1971 году¹. В основе идеи существования мемристора лежит предположение о взаимосвязи магнитного потока и электрического заряда, из которой следует фундаментальное свойство мемристора – зависимость электрических характеристик от предыстории функционирования. В дальнейшем Чуа расширил термин «мемристор» до концепции «мемристивных систем» (memristive systems) и тем самым объединил динамические системы различной природы, чьи характеристики непрерывно зависят от предшествующих состояний, в единый класс систем. Подобные системы встречаются в различных областях физики, нейродинамики и других наук.

На момент публикации работы Чуа не получили такой широкой известности, как в наше время. Особый интерес к данной теме появился в 2008 году, когда коллектив исследователей лаборатории Hewlett Packard объявил о создании электронного устройства², обладающего свойствами мемристора. Работа послужила поводом для дискуссий и споров в научном обществе. Основной причиной критики является тот факт, что в основе работы экспериментального образца не задействован магнитный поток, в отличие от первоначальной идеи мемристора, изложенной Леоном Чуа. Тем не менее, модель мемристора, представленная в работе², удовлетворяет определению мемристивных систем, как и многие последующие образцы, разработанные другими исследователями. Важно отметить трансформацию определения «мемристор» с момента первого упоминания в работе¹ по настоящее время. Первоначально мемристор упоминался как элемент, реализующий взаимосвязь магнитного потока и электрического заряда. В настоящее время мемристором называется двухполюсник, сопротивление (или проводимость) которого непрерывно зависят от состояний в предыдущие моменты времени, вне зави-

¹Chua L. Memristor-The Missing Circuit Element // IEEE Trans. on Circuit Theory. 1971. Vol. CT-18, no. 5. P. 507–519.

²The missing memristor found / D. Strukov, G. Snider, D. Stewart et al. // Nature. 2008. Vol. 453, no. 7191. P. 80–83.

симости от того, какие физические процессы являются причиной подобных эффектов.

Область применения мемристора необычайно широка. Свойства мемристора могут быть использованы при разработке элементов памяти, программируемых усилителей, аттенюаторов, адаптивных фильтров и т.д.. Мемристивные системы могут использоваться при разработке новых типов вычислительных устройств. Всплеск интереса к мемристивным системам привел к развитию ряда научных направлений, находящихся на стыке электроники и нейродинамики. Аналогия между свойствами мемристора и синапсов нервных клеток позволила рассматривать мемристор как элемент нейроморфных электронных устройств, в основе работы которых заложены принципы нейробиологии.

С точки зрения нелинейной динамики мемристор вызывает интерес прежде всего как элемент, отличительные особенности которого могут существенным образом изменить динамику колебательных систем радиофизической природы, что в свою очередь может приводить к качественно новым режимам колебаний. Одним из таких феноменов является существование линии равновесия.

Модели содержащих мемристор колебательных систем с линией равновесия исследовались ранее³. Для этих систем была установлена бифуркация рождения периодических колебаний (бифуркация Андронова-Хопфа), индуцируемая путем изменения начальных условий при фиксированных значениях управляющих параметров. После бифуркации в зависимости от начальных условий траектория в фазовом пространстве либо притягивается множеством состояний равновесия на линии равновесия, либо достигает одной из множества неизолированных замкнутых кривых, и в фазовом пространстве наблюдаются периодические колебания. Таким образом после бифуркации аттрактор состоит из устойчивого множества неподвижных точек на линии равновесия и замкнутой поверхности, образованной множеством неизолированных замкнутых кривых. Результаты, представленные в работах³ не позволяют

³Itoh M., Chua L. Memristor Oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, no. 11. P. 3183–3206.

Botta V., N espoli C., Messias M. Mathematical Analysis of a Third-order Memristor-based Chua's Oscillator // TEMA Tend. Mat. Apl. Comput. 2011. Vol. 12, no. 2. P. 91–99.

сделать вывод о бифуркационных механизмах, приводящих к появлению замкнутой поверхности аттрактора, образованной множеством неизолированных замкнутых кривых. Таким образом вопрос о бифуркациях в системах с линией равновесия на основе мемристора, приводящих к возникновению периодических решений, требует дополнительного анализа

Целью выпускной квалификационной работы является выявление бифуркационных явлений в системе с линией равновесия, содержащих мемристор Чуа, которым соответствует рождение периодических колебаний. Рассматриваются две системы с мемристором Чуа. Первая система содержит линейное отрицательное сопротивление. Вторая система помимо мемристора содержит элемент с нелинейным отрицательным сопротивлением. Описываются механизмы ограничения амплитуды в обеих системах. Наряду с теоритическим анализом и численным моделированием уравнений модели проводится экспериментальное исследование на примере электронной аналоговой модели осциллятора. Рассматриваются вопросы физической реализуемости динамики систем с линией равновесия, а также классификации колебаний в данном классе систем.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приводится более детальное описание мемристора, перспектив его использования, многообразия задач, имеющих отношение к мемристорам. Во второй главе рассматривается модель осциллятора, который представляет собой последовательный колебательный контур, содержащий элемент с отрицательным сопротивлением и управляемый магнитным потоком мемристор, подключенный параллельно с конденсатором. В работе будут исследованы две конфигурации схемы. В первом случае контур содержит линейное отрицательное сопротивление. Вторым вариантом предусматривается наличие в контуре нелинейного элемента с вольт-амперной характеристикой S-типа, содержащей участок отрицательного сопротивления и задаваемой полиномом третьей степени. В качестве модели мемристора рассматривается упрощенная модель мемристора, предложенная Леоном Чуа¹. Основная особенность исследуемых систем заключается в том, что в фазовом пространстве содержится бесконечное число неподвижных точек, расположенных на оси $(0; 0; z)$, образующих линию равновесия. Одно из собственных значений всех точек равновесия всегда равно нулю, а остальные зависят от параметров и положения точек на оси OZ (координаты z). Каждая точка оси линии равновесия нейтрально устойчива в направлении оси OZ.

В разделе «Жесткое возбуждение колебаний в системе с постоянным отрицательным сопротивлением» рассматривается первый вариант осциллятора с постоянным отрицательным сопротивлением. Установлено, что увеличение управляющего параметра β от нуля приводит к следующим бифуркационным изменениям в фазовом пространстве. В случае $0 \leq \beta < 0.02$ аттрактор системы представляет собой многообразие устойчивых равновесий, и все траектории притягиваются к ним (рисунок 1(а)). Когда параметр β достигнет значения $\beta = 0.02$ неподвижные точки с координатами $-1 < z < 1$ теряют устойчивость и становятся неустойчивыми фокусами, в то время как другие неподвижные точки линии равновесия с $|z| \geq 1$ остаются устойчивыми (они потеряют устойчивость при переходе через $\beta = 2$). Начиная свое движение вблизи неподвижной точки $(0; 0; z \in (-1; 1))$, фазовая точка отдаляется от начального положения, двигаясь по спирали, что в итоге заканчивается движением по инвариантной замкнутой кривой (синяя линия на рисунке 1(б)).

Любое изменение начальных условий приведет к падению на другую инвариантную замкнутую кривую. Таким образом, при прохождении через бифуркационное значение $\beta = 0.02$ меняется структура аттрактора системы. После бифуркации аттрактор состоит из множества устойчивых неподвижных точек ($x = y = 0, |z| \geq 1$) и инвариантных замкнутых кривых, образующих двумерную поверхность (подобно волчку) аттрактора при $-1 < z < 1$ (рисунок 1(б)). При этом, важно отметить, что при дальнейшем росте параметра β аттрактор системы не претерпевает никаких качественных и количественных изменений, вплоть до значения $\beta = 2$. К сожалению, анализ устойчивости

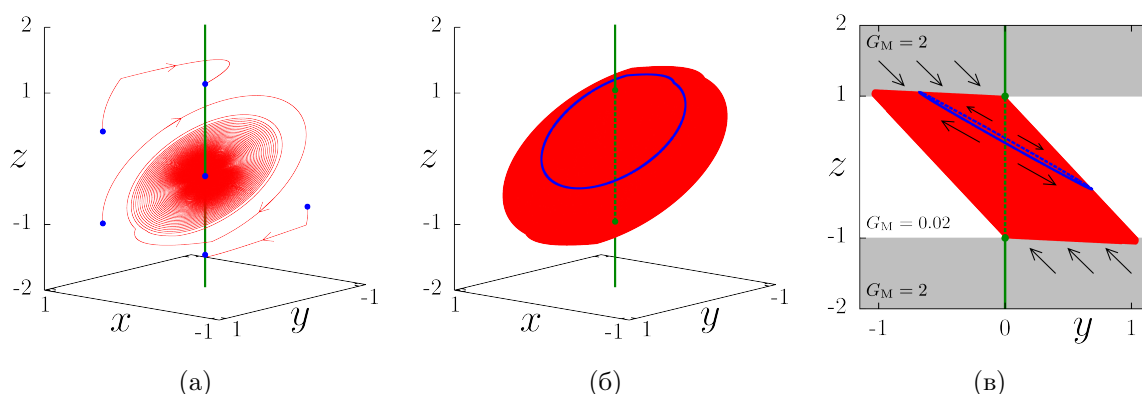


Рисунок 1 — Траектории в фазовом пространстве осциллятора с постоянным отрицательным сопротивлением: (а) Движение к линии равновесия (траектории окрашены красным цветом) из различных начальных условий (синие заполненные круги) при $\beta = 0.01$; (б) инвариантная кривая, соответствующая движению из начального условия ($x_0 = y_0 = 0.5, z_0 = -0.1$), на аттракторе; (в) Проекция аттрактора и инвариантной кривой в плоскости (y, z) ; (б) и (в) соответствует $\beta = 0.05$; На всех фрагментах множество устойчивых состояний равновесия обозначены сплошной зеленой линией, зеленой пунктирной линией показано многообразие неустойчивых состояний равновесия; Поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых, окрашена в красный цвет (на фрагментах (б)-(в));

неподвижных точек не позволяет выявить бифуркационные механизмы формирования замкнутой поверхности аттрактора при $|z| < 1$. Для того, чтобы понять причины наблюдаемой при $\beta = 0.02$ трансформации аттрактора, исследуемая система приводится к осцилляторному виду, затем осуществляется поиск решения в виде гармонической функции в комплексном представлении с медленно меняющейся амплитудой. Из полученного решения можно сделать следующие выводы. В момент бифуркации никаких других новых устойчивых или неустойчивых особых множеств не появляется. Рост амплитуды колебаний $x(t)$ также приводит к росту амплитуды колебаний $y(t)$ и $z(t)$. Это приводит к тому, что динамическая переменная $z(t)$ начинает выходить за

пределы $z \in (-1; 1)$, и попадать в области, где диссипация энергии (для этих областей $G_M(z) = 2$, серые зоны на рисунке 1(в)), превышает подкачку, которая характеризуется отрицательным сопротивлением системы (параметр β). В результате рост амплитуды прекращается. Описанный переход к колебательному режиму характеризуется скачкообразным изменением амплитуды и может рассматриваться как жесткое возбуждение колебаний. В таком случае жесткое колебательное возбуждение не связано с локальными бифуркациями предельных множеств. Этот сценарий отличается от классических бифуркационных механизмов. Переход к колебательному режиму обуславливается кусочно-гладкой характеристикой мемристора и связан с тем, что траектория периодического движения в фазовом пространстве пересекает или касается поверхности, на которой осуществляется сшивание кусочно-гладкой функции $G_M(z)$. Описанное изменение динамики называется бифуркацией столкновения с границей (border-collision bifurcation).

В разделе «Мягкое возбуждение колебаний в системе с нелинейным отрицательным сопротивлением» рассматривается второй вариант схемы. Увеличение управляющего параметра β_1 при $\beta_1 = 0.02$ в исследуемой системе просходит бифуркация потери устойчивости неподвижных точек с координатами $(x = y = 0, z \in (-1; 1))$. После бифуркации аттрактор системы состоит из множества инвариантных замкнутых кривых, которые образуют двумерную поверхность, и множества устойчивых точек равновесия на линии равновесия. Изменение динамики проиллюстрировано на рисунках 2(а), 2(б). В этом случае плавное увеличение параметра β_1 приводит к постепенному росту амплитуды колебаний $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, соответствующих движениям вдоль инвариантных замкнутых кривых. При увеличении параметра β_1 двумерная поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых, постепенно расширяется. Дальнейшее увеличение параметра β_1 приводит к формированию аттрактора, который идентичен аттрактору (рисунок 1(б)). Для того, чтобы понять причины эволюции аттрактора с ростом управляющего параметра, проводится анализ в рамках квазигармонического приближения. Результаты аналитического решения показывают, что при достижении значения $\beta_1 = 0.02$ устойчивые состояния равновесия $(x = y = 0; |z| < 1)$ становятся неустойчивыми, и в их окрестности рождаются инвариантные за-

мкнутые кривые. При дальнейшем росте параметра β_1 амплитуда колеба-

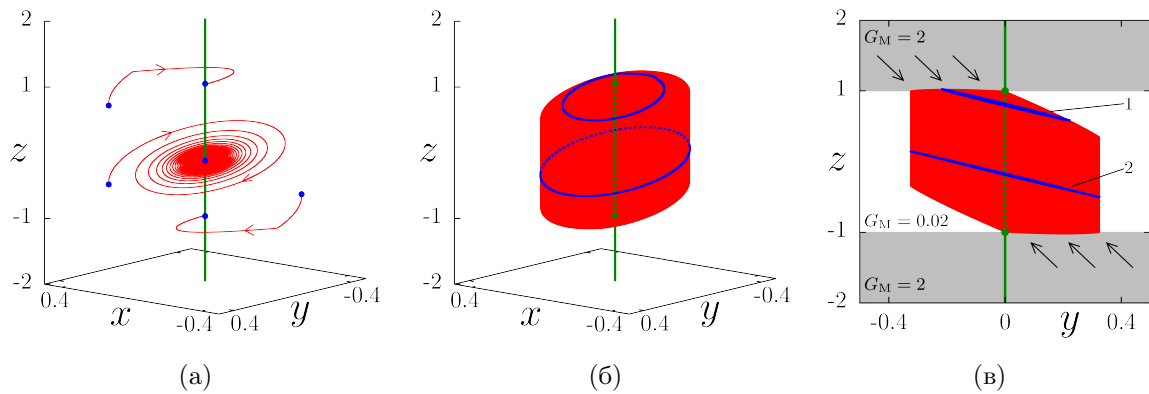


Рисунок 2 — Траектории в фазовом пространстве осциллятора с нелинейным отрицательным сопротивлением: (а) Движение к линии равновесия (траектории окрашены красным цветом) из различных начальных условий (синие заполненные круги) при $\beta_1 = 0.01$; (б) аттрактор системы $\beta_1 = 0.1$; (в) Проекция аттрактора и инвариантной кривой плоскости (y, z) при $\beta_1 = 0.1$; На всех фрагментах множество устойчивых состояний равновесия обозначены сплошной зеленой линией, зеленой пунктирной линией показано многообразие неустойчивых состояний равновесия; Поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых, окрашена в красный цвет (на фрагментах (б)-(в));

ний $x(t)$, соответствующих движению по инвариантной замкнутой кривой, плавно увеличивается как корень из надкритичности. Описанный сценарий возникновения колебаний является мягким механизмом возбуждения колебаний. Аттрактор включает в себя две полуоси устойчивых неподвижных точек ($x = y = 0; |z| \geq 1$) и замкнутую поверхность, состоящую из нескольких частей. Центральная часть образована непрерывным множеством инвариантных замкнутых кривых идентичной формы (одна из них показана на рисунках 2(б)-2(в) и обозначена цифрой 2). Центральная поверхность, соответствует области фазового пространства, где характер колебаний определяется свойствами нелинейного элемента с отрицательным сопротивлением, подобно автономному автогенератору Ван дер Поля. В этой области мгновенное значение $z(t)$ не достигает единицы. Если при движении по инвариантной замкнутой кривой достигается значение $|z(t)| = 1$ (замкнутая кривая под номером 1 на рисунках 2(б)-2(в)), то ограничение роста амплитуды будет определяться за счет суммарного влияния нелинейного отрицательного сопротивления и свойств мемристора. Амплитуда колебаний уменьшается при приближении к границе областей $|z| = 1$, из-за резкого увеличения диссипации за пределами области $z \in [-1; 1]$.

В третьей главе проводится экспериментальное исследование на примере электронной аналоговой модели осциллятора с линией равновесия на основе мемристора. Подобное исследование на примере системы с линейным трением проводилось в работе ⁴. Аналогичным образом будет рассматриваться система с нелинейным отрицательным сопротивлением. Также будут рассмотрены вопросы физической реализуемости динамики систем с линией равновесия.

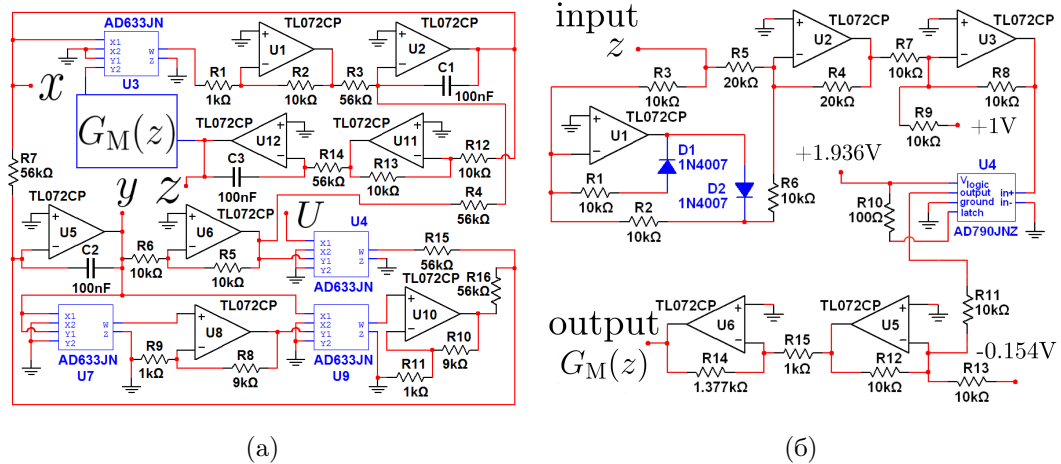


Рисунок 3 — (а) Общая схема экспериментальной установки; (б) Электронная реализация функции $G_M(z)$;

В целях экспериментального исследования системы была разработана экспериментальная установка, являющаяся её электронной аналоговой моделью. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 3. При проектировании экспериментальной установки использовались принципы аналогового моделирования. Схема, изображенная на рисунке 3(а), содержит три интегратора U2, U5 и U12, напряжения на входе которых принимается за мгновенные значения динамических переменных $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответственно (отмечены на рисунке 3(а)). Затем сигналы $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ подвергаются дальнейшей обработке. Необходимые преобразования производятся посредством аналоговых умножителей AD633JN, инвертирующих и неинвертирующих усилителей на базе операционных усилителей TL072CP. Преобразования в соответствии с функцией $G_M(z)$ (рисунок 3(б)) удалось добиться с помощью схемы, содержащей компаратор AD790JNZ. Полученные после преобразования сигналы подключаются к входам интеграторов. Временные реализации

⁴Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects / V. Semenov, I. Korneev, P. Arinushkin et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2015. Vol. 224, no. 8. P. 1553–1561.

снимались с помощью АЦП NI-PCI 6133 (производства компании National Instruments) с частотой дискретизации 50 кГц. Дальнейшая обработка и визуализация записанных временных рядов осуществляется на компьютере.

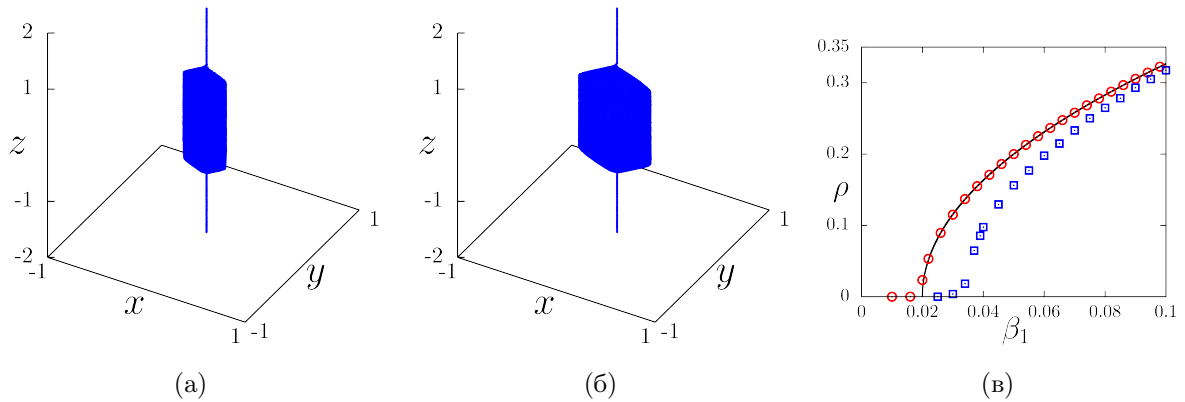


Рисунок 4 — Траектория, реализуемая экспериментальной установкой. (а) $\beta_1 = 0.04$; (б) $\beta_1 = 0.1$; (в) Зависимость амплитуды колебаний $x(t)$, при которых $|z(t)|$ не превышает единицу, от параметра β_1 : полученная аналитически (черная линия) и в численном моделировании (красные круги), так же зависимость максимальной достижимой амплитуды $x(t)$ при работе экспериментальной установки от значений параметра β_1 (синие квадраты).

Экспериментальное рассмотрение системы, показало невозможность наблюдения стационарных режимов колебаний. С момента включения экспериментальной установки наблюдалось монотонное увеличение значения переменной z , что с течением времени завершалось достижением z максимально возможного значения, ограниченного напряжением питания экспериментальной установки. При этом колебания экспериментальной установки описывают поверхность аттрактора математической модели. Это связано с добавлением малой константы в треть уравнение системы $\frac{dz}{dt} = x$, что приводит к разрушению линии равновесия. Эволюция динамики экспериментальной установки с ростом параметра β_1 показала структурные изменения при достижении $\beta_1 \approx 0.03$. При этом максимальная амплитуда, которую достигали колебания при прохождении через область $z \in (-1; 1)$, постепенно увеличивалась, начиная от близких к нулю значений, с ростом управляющего параметра (рисунок 4(а), 4(б)). Экспериментально зарегистрированная максимальная амплитуда колебаний $x(t)$ близка к теоретически рассчитанной амплитуде колебаний $x(t)$, соответствующих движению вдоль инвариантной замкнутой кривой в центральной части двумерной поверхности (рисунок 4(в)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках представленной работы были выявлены бифуркационные механизмы в системе с линией равновесия на базе мемристора, приводящие к возникновению периодических колебаний. В системе с кусочно-гладкой нелинейностью, обусловленной характеристикой мемристора, возбуждение колебаний имеет скачкообразный (жесткий) характер и характеризуется бифуркацией C – типа (в русскоязычной литературе подобные бифуркации называют C – бифуркациями, в англоязычных источниках их называют «border collision bifurcation»). В системе, содержащей как кусочно-гладкую нелинейную функцию, порождаемую свойствами мемристора, так и гладкую во всей области определения, нелинейную функцию, которая появляется при добавлении в систему дополнительного нелинейного элемента, возбуждение колебаний имеет мягкий характер и демонстрирует ряд особенностей, свойственных суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Наблюдается следующая трансформация аттрактора. В момент бифуркации потеря устойчивости множества неподвижных точек с координатами $(0; 0; |z| < 1)$ сопровождается рождением инвариантных замкнутых кривых в окрестности точек интервала $z \in (-1; 1)$. Если инвариантная замкнутая кривая не пересекает плоскости $|z| = 1$, то её радиус пропорционален корню из надкритичности. Несмотря на сходство бифуркационных механизмов, соответствующих мягкому возбуждению колебаний в исследуемой системе, с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, проведение полной аналогии не является корректным. Результатом суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в нелинейных диссипативных системах является переход к режиму автоколебаний, образом которых в фазовом пространстве служит замкнутая изолированная кривая – предельный цикл, имеющий конечный бассейн притяжения. Перед суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа фазовое пространство содержит устойчивую неподвижную точку, также имеющую свой собственный бассейн притяжения с ненулевым объемом. Однако ни состояния равновесия на линии равновесия, ни инвариантные замкнутые кривые сами по себе не являются аттракторами. Не представляется возможным выделить бассейн притяжения конечных размеров ни для точек на линии равновесия, ни для инвариантных замкнутых кривых.

По этим причинам нельзя называть колебания в исследуемых системах, отвечающие движению по инвариантным замкнутым кривым, автоколебаниями. Термин «автоколебания»⁵ предполагает независимость характеристик колебаний от начальных условий в конечной области фазового пространства. В случае систем с линией равновесия такую область выделить нельзя. Колебания в фазовом пространстве исследуемых систем устойчивы в направлении оси OZ и характеризуются непрерывной зависимостью среднего значения $z(t)$ от начальных условий как до, так и после бифуркации рождения периодических колебаний. Вопросы классификации колебаний в системах с линией равновесия требуют отдельного рассмотрения и будут проанализированы в дальнейших исследованиях.

Средствами аналогового моделирования была показана структурная неустойчивость аттракторов в системах с линией равновесия. Несмотря на это, в физическом эксперименте были зафиксированы траектории, описывающие движение по поверхности аттрактора математической модели.

Материалы выпускной квалификационной работы содержатся в двух статьях⁶. Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научная школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (24–28 ноября 2014, г.Саратов)
- Международная конференция «Saratov Fall Meeting» (27–30 сентября 2016, г.Саратов)
- Международная конференция «MEMRISYS 2017» (3–6 апреля 2017, г.Афины)

⁵Andronov A., Vitt A., Khaikin S. Theory of Oscillators. Adiwes Intrnational Series in Physics. 1st edition. Pergamon, 1966.

⁶Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects / V. Semenov, I. Korneev, P. Arinushkin et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2015. Vol. 224, no. 8. P. 1553–1561.

Korneev I., Vadivasova T., Semenov V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria // arXiv:1705.06301 (принято к печати в журнале Nonlinear Dynamics). 2017.