Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРИЯ АРБИТРАЖА

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Кобцева Сергея Владимировича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ____________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое дифференциальное уравнение — это сложный математический объект, имеющий широкое применение в различных областях науки и техники. Этот объект позволяет описывать поведение динамических величин с учетом влияния случайных факторов. Для моделирования случайных факторов используются случайные процессы.

Стандартными моделями финансовой математики стали стохастические дифференциальные уравнения. В отличие от детерминированных моделей, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения, которые имеют единственное решение для каждого соответствующего начального условия, стохастические дифференциальные уравнения имеют решения, являющиеся непрерывными случайными процессами.

Цель работы — изучение теории стохастических дифференциальных уравнений и их приложений в финансовой математике, исследование сходимости некоторых явных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и подходов к их программной реализации.

Основные задачи:

1. Введение в стохастические дифференциальные уравнения.
2. Изучение некоторых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений.
3. Программная реализация выбранных методов для решения стохастического дифференциального уравнения, возникающего при моделировании динамики цен акций.
4. Выполнение вычислительных экспериментов с целью практического исследования вопроса о сходимости к точному решению.

Работа состоит из шести глав:

1. Формулы Ито.
2. Процессы Орнштейна-Уленбека.
3. Теоремы существования и единственности.
4. Системы стохастических дифференциальных уравнений.
5. Модель и формула Блэка-Шоулза.
6. Анализ сходимости сильных одношаговых методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

1 Формулы Ито

Теорема 1 (Простейший вариант формулы Ито)**.** *Если* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *имеет непрерывную вторую производную, то*

$$f(B_t)=f(0)+\int_0^t f'(B_s)\,dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$$

или, в дифференциальной символической записи,

$$df(B_t)=f'(B_t)\,dB_t+\frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Формула Ито для пространства-времени. Если $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, т.е. имеет непрерывные первую производную по первой перменной и вторую производную по второй, то справедлива формула

$$df(t,B_t)=\frac{\partial f}{\partial t}\,dt+\frac{\partial f}{\partial x}\,dB_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dt.$$

Векторное обобщение формулы Ито. Формула Ито в векторном случае имеет вид (например, для дважды дифференцируемых функций f):

$$df(t,B_t^{(1)},\ldots,B_t^{(n)})=\frac{\partial f}{\partial t}\,dt+(\nabla f,d\vec{B}_t)+\frac{1}{2}\Delta f\,dt,$$

где $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $d\vec{B}_t=\left(dB_t^{(1)},\ldots,dB_t^{(n)}\right)$.

Обобщение формулы Ито для стандартных процессов. Стандартный процесс — процесс, который может быть описан с помощью стохастического интеграла

$$dX_t=a(\omega,t)\,dt+b(\omega,t)\,dB_t,$$

причем a, b — предсказуемые, измеримые и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T|a(\omega,s)|\,ds<\infty\right)=1$$

и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T|b(\omega,s)|^2\,ds<\infty\right)=1.$$

Формула Ито для стандартных процессов имеет вид: если $Y_t = f(t, X_t)$, то

$$dY_t = f_t\,dt + f_x\,dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}\,dX_t \bullet dX_t,$$

где $dX_t \bullet dX_t$ есть операция перемножения по формуле

$$\begin{array}{ccc} \bullet & dt & dB_t \\ dt & 0 & 0 \\ dB_t & 0 & dt \end{array}$$

Следствие 1 (Формула интегрирования по частям)**.** *Пусть* X_t*,* Y_t *— два стандартных процесса, зависящих от одного и того же броуновского движения. Тогда*

$$d(X_t Y_t) = Y_t\,dX_t + X_t\,dY_t + dX_t \bullet dY_t,$$

или, в интегральной форме,

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t b(\omega, t)\beta(\omega, t)\,dt.$$

2 Процессы Орнштейна-Уленбека

Практически все непрерывные случайные процессы, имеющие важное значение в приложениях удовлетворяют уравнению вида

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \text{ при } X_0 = x_0.$$

Такие стохастические дифференциальные уравнения обеспечивают исключительно эффективную основу для построения и анализа стохастических моделей.

Одно из наиболее естественных и наиболее важных стохастических дифференциальных уравнений задается

$$dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t \text{ при } X_0 = x_0 > 0,$$

где коэффициенты уравнения $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ константы. Решение этого уравнения дается формулой

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right).$$

Уравнение

$$dX_t = -\alpha X_t\,dt + \sigma\,dB_t \text{ при } X_0 = x_0,$$

где α и σ положительные константы, является моделью Орнштейна-Уленбека. Решение этого уравнения дается формулой

$$X_t = x_0 \exp(-\alpha t) + \sigma \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))\,dB_s.$$

3 Теоремы существования и единственности

Теорема 2 (Существование и единственность)**.** *Если коэффициенты стохастического дифференциального уравнения*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \text{ при } X_0 = x_0 \text{ и } 0 \le t \le T, \tag{1}$$

удовлетворют условию Липшица по пространственной переменной

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \le K|x-y|^2$$

и пространственному условию роста

$$|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \le K(1 + |x|^2),$$

то существует непрерывное адаптированное решение X_t уравнения (1), равномерно ограниченое в $L^2(dP)$:

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathsf{E}(X_t^2) < \infty.$$

Кроме того, если X_t и Y_t являются непрерывными L^2 ограниченными решениями уравнения (1), то

$$\mathsf{P}(X_t = Y_t \text{ при всех } t \in [0, T]) = 1.$$

4 Системы стохастических дифференциальных уравнений

Если бы теория дифференциальных уравнений была ограничена одним измерением, у нас не было бы самолетов, радио, телевидения, управляемых ракет и много чего другого. К счастью, теория дифференциальных уравнений переносится на системы уравнений, и это же естественно для стохастических дифференциальных уравнений.

Для того чтобы обозначения были близки к одномерным задачам, целесообразно писать системы стохастических дифференциальных уравнений как

$$d\vec{X}_t = \vec{\mu}(t, \vec{X}_t)\,dt + \sigma(t, \vec{X}_t)\,d\vec{B}_t, \text{ при } X_0 = x_0, \tag{2}$$

где мы имеем

$$\vec{\mu}(t, \vec{X}_t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t, \vec{X}_t) \\ \mu_2(t, \vec{X}_t) \\ \vdots \\ \mu_d(t, \vec{X}_t) \end{bmatrix} \text{ и } d\vec{B}_t = \begin{bmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \\ \vdots \\ dB_t^d \end{bmatrix} \tag{3}$$

вместе с

$$\sigma(t, \vec{X}_t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где мы используем сокращение $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t, \vec{X}_t)$. Основная теорема существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений распространяется на случай систем стохастических дифференциальных уравнений только с косметическими изменениями.

5 Модель и формула Блэка-Шоулза

Обозначим через S_t цену акции в момент времени t и пусть β_t обозначает цену облигации в момент t. Далее мы полагаем временную динамику этих двух процессов, которая должна быть дана следующими уравнениями

$$\text{Модель акции: } dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t \qquad \text{Модель облигации: } d\beta_t = r\beta_t\, dt;$$

то есть, мы предполагаем, что цена акций определяется геометрическим броуновским движением, а цена облигации определяется детерминированным процессом с экспоненциальным ростом.

Для европейского колл-опциона с ценой исполнения K в момент завершения T выплата дается выражением $h(S_T) = (S_T - K)_+$. Чтобы найти цену арбитража для этой ценной бумаги, нам нужно найти способ реплицировать эту выплату. Новая идея заключается в создании динамичного портфеля, в котором количество акций и облигаций постоянно корректируется со временем.

Арбитражная цена европейского колл-опциона в момент времени t с текущей ценой акции S, временем выполнения T, ценой исполнения K и остаточным временем $\tau = T - t$ определяется по формуле

$$S\Phi\left(\frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

6 Анализ сходимости сильных одношаговых методов решения стохастических дифференциальных уравнений

Часто возникает необходимость прибегать к численному решению стохастических дифференциальных уравнений. При этом по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями ситуация усложняется в силу стохастичности. Для решения стохастических дифференциальных уравнений необходимо использовать специальные численные методы.

Пусть $X(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения на отрезке $[0, T]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ на N частей. Для упрощения будем считать, что все части имеют одинаковый размер $h = \frac{T}{N}$.

Пусть $Y(t)$ — дискретная аппроксимация $X(t)$, вычисленная путем применения некоторого численного метода в указанных точках разбиения отрезка $[0, T]$.

Определение 1. *Говорят, что численный метод сходится сильно к $X(t)$ в момент времени T, если*

$$\lim_{h \to 0} \mathsf{E}\{|X(T) - Y(T)|\} = 0.$$

Определение 2. *Говорят, что численный метод сходится сильно к $X(t)$ в момент времени T с порядком $p > 0$, если существует постоянная $C > 0$, не зависящая от h, и число $\delta > 0$, такие что*

$$\mathsf{E}\{|X(T) - Y(T)|\} \leq Ch^p,$$

для всех $h \in (0, \delta)$.

Метод Эйлера-Маруяма

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)h + b(X_i, t_i)\Delta B_i, \qquad X_0 = x_0.$$

Известно, что данный метод сходится в сильном смысле с порядком $p = 0.5$.

Метод Мильштейна

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)h + b(X_i, t_i)\Delta B_i + \\ + \frac{1}{2} b(X_i, t_i) b'_x(X_i, t_i)((\Delta B_i)^2 - h), \qquad X_0 = x_0.$$

Известно, что данный метод сходится в сильном смысле с порядком $p = 1$.

Метод Тейлора

$$
\begin{aligned}
X_{i+1} = X_i + a(X_i,t_i)h + b(X_i,t_i)\Delta B_i + \\
a'_x(X_i,t_i)b(X_i,t_i)\Delta Z_i + \frac{1}{2}b(X_i,t_i)b'_x(X_i,t_i)((\Delta B_i)^2 - h) + \\
+ \frac{1}{2}\left(a(X_i,t_i)a'_x(X_i,t_i) + \frac{1}{2}b^2(X_i,t_i)a''_{xx}(X_i,t_i)\right)h^2 + \\
+ \left(a(X_i,t_i)b'_x(X_i,t_i) + \frac{1}{2}b^2(X_i,t_i)b''_{xx}(X_i,t_i)\right)(\Delta B_i h - \Delta Z_i) + \\
+ \frac{1}{2}b(X_i,t_i)\left(b(X_i,t_i)b''_{xx}(X_i,t_i) + (b'_x(X_i,t_i))^2\right)\left(\frac{1}{3}(\Delta B_i)^2 - h\right)\Delta B_i, \\
X_0 = x_0,
\end{aligned}
$$

где ΔZ_i — приращение случайного процесса, имеющее нормальное распределение с нулевым средним, дисперсией $h^3/3$, коррелированное с ΔB_i. Известно, что данный метод сходится в сильном смысле с порядком $p = 1.5$.

При помощи линеаризации

$$e = \mathsf{E}\{|X(T) - Y(T)|\} \leq Ch^p$$

приходим к уравнение прямой

$$\ln(e) = p\ln(h) + \ln(C),$$

где параметр p определяет порядок сходимости численного метода в сильном смысле. Применив метод наименьших квадратов, оценивается значение параметра p.

Теоретические результаты по определению скорости сходимости этих методов иллюстрируются вычислительными экспериментами, используя уравнение для цен акции, аналитическое решение которого используется для оценки корректности и сходимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были рассмотрены: формула Ито, процесс Орнштейна-Уленбека, теорема существования и единственности, системы стохастических дифференциальных уравнений, модель и формула Блэка-Шоулза, а также проведен анализ сходимости сильных одношаговых методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

В результате проведенных вычислительных экспериментов были получены данные. В процессе сравнения их с теоретическими было установлено, что оценка порядка сходимости, полученная в результате проведения экспериментов приближенно совпадает с теоретическим значением порядка сходимости.

Стоит отметить, что с увеличением порядка сходимости в разы увеличивается сложность численного алгоритма. Поэтому на практике целесообразно использовать алгоритмы более низких порядков.

При выполнении работы были использованы источники [1–5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Ito, K.* On a stochastic integral equation / K. Ito // *Proc. Imperial Acad. Tokyo*. — 1946. — Vol. 22. — Pp. 32–35.

2 *Black, F.* Pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // *J. Political Econ.* — 1973. — Vol. 81. — Pp. 637–654.

3 *Kloeden, P. E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen. — New York: Springer-Verlag, 1995. — P. 632.

4 *Kloeden, P. E.* Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments / P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz. — New York: Springer-Verlag, 1994. — P. 292.

5 *Steele, J. M.* Stochastic Calculus and Financial Applications / J. M. Steele. — New York: Springer-Verlag, 2001. — P. 300.