Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КЕЙНСА

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 - Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Здроговой Марии Алексеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ________________ П.А. Терехин

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. ________________ С.П. Сидоров

Саратов 2017

Введение. Динамические модели экономических процессов составляют глубоко исследованную и широко применяемую на практике область математической экономики. Среди известных математических моделей экономики заметное место занимают глобальные модели, связывающие национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Хорошо известна, например, простейшая балансовая динамическая модель Кейнса, изучению которой посвящена данная работа.

Целями данной работы являются:

- изучение некоторых динамических моделей экономических процессов и принципов их математического моделирования;

- исследование численных методов решения дифференциальных уравнений на основе функций Хаара, построение алгоритма нахождения приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, теоретическое обоснование сходимости приближенных решений к точному решению задачи Коши.

Основное содержание и структура работы. Данная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения,списка литературы и приложения.

Первый раздел посвящен сплайнам.

Теория сплайнов и сплайн - аппроксимации - достаточно новый, весьма важный и интенсивно развивающийся раздел теории приближения функций.

Сплайн - аппроксимация - приближенное представление функции или приближенное восстановление функции из заданного класса по неполной информации (например, по значениям на сетке) с помощью сплайнов. Как и в классичесской теории приближения функций, изучаются линейные методы сплайн - аппроксимации, включая сплайн-интерполяцию, наилучшие методы, а также аппроксимации классами нелинейных сплайнов, например сплайнами с нефиксированными узлами.

Сплайны в экономике оказываются более естественным аппаратом приближения, чем многочлены, поэтому аппарат должен привлечь внимание экономистов-аналитиков, эконометристов.

Пусть на интервале $[a, b]$ задано разбиение

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$$

где $n \in N$. Пусть P_n - множество многочленов степени не выше $m \geqslant 0$ и $C^{(k)} = C^{(k)}[a, b]$ - множество непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих непрерывную

k - ую. производную, $k \in Z_+$.

Определение. Функцию $S_m(x) = S_{m,k}(x, \Delta_n)$ называют сплайном степени m дефекта $k, (1 \leqslant k \leqslant m)$ с узлами $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$, если

1.$S_m(x) \in P_m$ на $[x_i, x_{i+1}], (i = 0, 1, ..., n)$

2.$S_m(x) \in C^{m-k}[a, b]$

Точки $\{x_i\}$ называются узлами сплайна.

$(m - k + 1)$ - я производная $S_m(x)$ может оказаться разрывной на $[a, b]$ [1].

Простейшим примером сплайна является следующая функция

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Также в этом разделе мы рассмотрели интерполяцию сплайнами, кубические сплайны и B-сплайны.

Определение. Функцию $S_3(f = S_3(x; f)$ называют интерполяционным кубическим сплайном относительно сетки $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, (n \geqslant 2)$ для функции $f(x)$, если

1.$S_3(x; f) \in P_3, x \in (x_i, x_{i-1}), i = 0, 1, ..., n - 1$

2.$S_3(x; f) \in C^{(2)}[a, b]$

3.$S_3(x_i; f) = f(x_i), i = 0, 1, ..., n, n \geqslant 2.$

Пример. Пусть $(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 5), (4, 4)$. Тогда у нас $n = 4, h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1, x_i = x(1 \leqslant i \leqslant 4), y_0 = 0, y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 4$. Сплайнами являются полиномы

$$p_i(x) = y_{i-1}(x_i - x) + y_i(x - xi - 1) - \frac{1}{6} f''_{i-1}[(x_i - x) - (x_i - x)^3] -$$

$$-\frac{1}{6} f''_i [(x - x_{i-1}) - (x - x_{i-1})^3]$$

на интервалах $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Чтобы сопоставить данным естественный сплайн, нужно решить следующую систему

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Ее решения: $f''_1 = -7,5, f''_2 = 12$ и $f''_3 = -10,5$. В итоге мы получим сплайн, добавляя условия $f''_0 = f''_4 = 0$. Его четыре кубических полинома имеют следующий вид

$p_1(x) = 2x + \frac{7,5}{6}(x - x^3)$,

$$p_2(x) = 2(2-x) + (x-1) + \frac{7,5}{6}[(2-x) - (2-x)^3] - \frac{12}{6}[(x-1) - (x-1)^3],$$

$$p_3(x) = (3-x) + 5(x-2) + \frac{12}{6}[(3-x) - (3-x)^3] + \frac{10,5}{6}[(x-2) - (x-2)^3],$$

$p_4(x) = 5(4-x) + 4(x-3) + \frac{10,5}{6}[(4-x) - (4-x)^3]$.

Представляет этот сплайн сплошная линия на рис. 1. На нем также показано, что если значение $y_2 = 1$ незначительно поменять (на 1,3), то измениться и весь сплайн - перейдет в пунктирную линию.

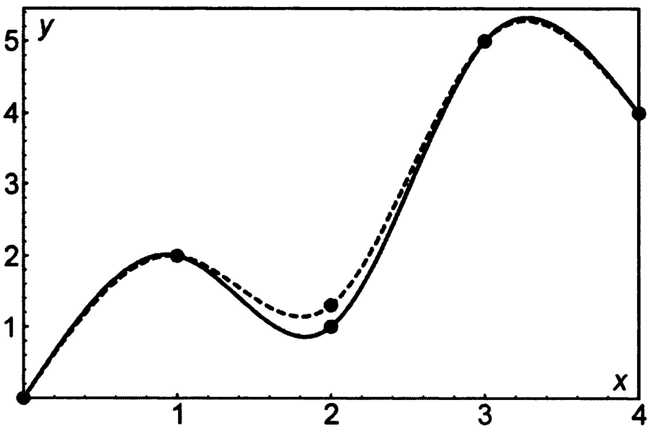

Рисунок 1 Описание данных с помощью кубических сплайнов. Если поменяется всего лишь одна точка данных, то изменение коснется всего сплайна(его представит пунктирная кривая).

Произвольный **В-сплайн (базисная функция сплайна)** B_i представляет собой фиксированный кубический сплайн, задаваемый по пяти точкам разбиения $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+4}$. Он принимает ненулевые значения вне интервала $[x_i, x_{i+4}]$. Любой кубический сплайн с точками разбиения $x_0, x_1, ..., x_n$ можно задать равенством

$$s(t) \equiv \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i B_i(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_n,$$

в котором α_i определены единственным образом.

Во втором разделе мы рассматриваем модель Кейнса: **непрерывный вариант:**

Пусть $Y(T)$, $E(T), S(T), I(T)$ - соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени T. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \qquad (1)$$

Где $A(T)$ - коэффициент склонности к потреблению $(0 < A(T) < 1)$, $B(T)$ - автономное (конечное) потребление, $K(T)$ - норма акселерации. Все функции, входящие в уравнение (1), положительны.

Поясним смысл уравнений (1). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу - этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народной хозяйстве и конечного потребления - эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход [2].

Дискретный вариант:

В рассматриваемой модели роль единственной эндогенной переменной Y, изменяющейся во времени, выполняет валовый внутренний продукт (ВВП), т.е. объем производства товаров конечного пользования. ВВП состоит из четырех частей: фонд непроизводственного потребления C, валовые частные внутренние инвестиции I, государственные расходы на закупку товаров и услуг G, чистый экспорт E. В модели экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равен 0, а государственные расходы распределяются на потребление и накопление, поэтому принимается:

$$Y = C + I.$$

В модели предполагается, что спрос на инвестиционные товары постоянен, а спрос на потребительские товары в будущем году есть линейная функция ВВП текущего года:

$$C_{t+1}^{D} = \underline{C} + cY_t + I.$$

Эта модель может применяться только для анализа и краткосрочного прогнозирования поведения экономики. Она не пригодна для долгосрочного прогнозирования, поскольку не отражает воспроизводственный процесс, в частности, в ней не учтено выбытие фондов в связи с их физическим и моральным износом.

С математической точки зрения эта модель является линейным конечно - разностным уравнением первого порядка.

А также уточняющую динамическую **модель Самуэльсона – Хикса.**

Модель экономического цикла Самуэльсона - Хикса - типичная кейсианская динамическая модель. Отличие модели Самуэльсона - Хикса от динамической кейсианской модели состоит в отказе от постоянства инвестиций и введении их переменной части, которая пропорциональна приросту ВВП текущего года по сравнению с прошлым годом:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + Y_t + r(Y_t - Y_{t-1}) + I,$$

где r - коэффициент акселерации (ускорения), $0 < r < 1$.

С математической точки зрения модель Самуэльсона - Хикса - линейной конечно - разностное уравнение второго порядка [3].

В этом же разделе мы рассматриваем математическую модель Кейнса и классическую модель рыночной экономики. Мы рассмотрели кейсианский подход к прогнозированию и регулированию рыночной экономики.

Классическую модель рыночной экономики можно рассматривать как систему взаимосвязанных моделей, каждая из которых выражает поведение одного из трех рынков: денег, товаров и рабочей силы.

Модель наиболее подходит для описания экономики с совершенной конкуренцией. В условиях действия монополий она не работает.

Основные новшества модели Кейнса по сравнению с классической состоят в следующем:

1. Равновесие на рынке товаров достигается при равенстве планируемого спроса и фактического предложения;

2. Фактический спрос на рабочую силу определяется фактически востребованным продуктом, и, поэтому, равновесие на рынке рабочей силы может быть достигнуто тогда, когда рынок товаров находится в равновесии.

Третий раздел посвящен системе Хаара, рассмотрены оценки коэффициентов, а также теоремы о сходимости рядов Фурье-Хаара.

Определение. *Система Хаара* - это система функций

$$\chi = \Big\{\chi_n(x)\Big\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n < 2^{k+1}, k = 1, 2, ...,$ определяется следующим образом:

$$\chi_n(x) = \chi_{n,j} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \overline{\Delta}_n; \\ 2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^+; \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Теорема. Справедливы следующие неравенства:

$$|c_N(f)| \leqslant (2n)^{-1/2}\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n > 1,$$

если $f \in C(0,1)$;

$$|c_N(f)| \leqslant n^{1/p-1/2}\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n > 1,$$

если $f \in L^p(0,1), 1 \leqslant p < \infty$. (Здесь $\omega(\delta, f)$ и $\omega_p(\delta, f)$- модули непрерывности функции $f(x)$ в пространствах C и L^p) [4].

Теорема. Для произвольной функции $f(x) \in C(0,1)$ ее ряд Фурье-Хаара сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,1]$. При этом

$$\rho_C(f, N) := ||f - S_N(f)||_C \leqslant 3\omega\left(\frac{1}{N}, f\right), \quad N \geqslant 1$$

Теорема. Для коэффициентов Фурье по системе Хаара каждой функции $f \in C(0,1)$, $f \neq const$, справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f)| n^{3/2} > 0.$$

Теорема. Если функция $f(x), x \in (0,1)$, абсолютна непрерывна, то

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2^k+1}^{2^k+1} |c_n(f)| = \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(x)| dx.$$

В этом же разделе исследованы численные методы решения широкого класса дифференциальных уравнений, описывающих динамические модели экономики.

Алгоритм построения приближенного решения

Рассмотрим алгоритм построения приближенного решения на примере линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = b(x), 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с начальным условием $y(0) = y_0$. Полагаем, что $a, b \in C[0,1]$. Ищем приближенное решение $y_n(x)$, представляя его производную в виде полинома по системе Хаара порядка не выше 2^n :

$$y'_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k}\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_{n,k}\chi_{k2^{-n},(k+1)2^{-n}}(x),$$

т.е. в виде кусочно-постоянной функции с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$, в которых значение полинома определяется так же, как и для функций Хаара. Для самого приближенного решения имеем

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], k = 0, ..., 2^n - 1,$$

- кусочно-линейная функция с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k+\theta_{n,k})2^{-n}$, где $0 < \theta_{n,k} < 1$. Мы покажем, что аппроксимативные свойства приближенного решения не зависят от выбора промежуточных точек, поэтому для определенности можно взять $\theta_{n,k} = \frac{1}{2}$, при этом $x_{n,k}$ - середина отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$.

Потребуем, чтобы дифференциальное уравнение обращалось в равенство в точках $x_{n,k}, k = 0, ..., 2^n - 1$. В итоге получаем систему уравнений

$$y'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), k = 0, ..., 2^n - 1.$$

С учетом представления приближенного решения и его производной и обозначив $a_{n,k} = a(x_{n,k}), b_{n,k} = b(x_{n,k})$, найдем

$$y_{n,k} + a_{n,k}(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + \theta_{n,k}2^{-n}y_{n,k}), k = 0, ..., 2^n - 1.$$

Ясно, что последние рекуррентные соотношения однозначно определяют значения $y_{n,k}, k = 0, ..., 2^n - 1$, при условии $||a|| = max_{0\leqslant x\leqslant 1}|a(x)| \leqslant 2^n$. Следовательно, при достаточно больших n корректно определена кусочно-линейная функция $y_n(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению в точках $x_{n,k}, k = 0, ..., 2^n - 1$.

Упростим рекуррентные соотношения, отбрасывая слагаемые, содержащие $\theta_{n,k}$. А именно, рассмотрим рекуррентные (для любого n) соотношения

$$z_{n,k} + a_{n,k}(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}) = b_{n,k}), k = 0, ..., 2^n - 1.$$

Предположим $z'_n(x) = z_{n,k}, k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, k = 0, ..., 2^n - 1$, и

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], k = 0, ..., 2^n - 1[5].$$

В четвертом разделе мы рассмотрели пример использования функций Хаара для решения модели Кейнса. Для рассматриваемых методов решения дифференциальных уравнений с использованием функций Хаара была реализована программа, написанная на языке с++. Программа представлена в приложении.

Блок-схема программы приведена на Рис.2.

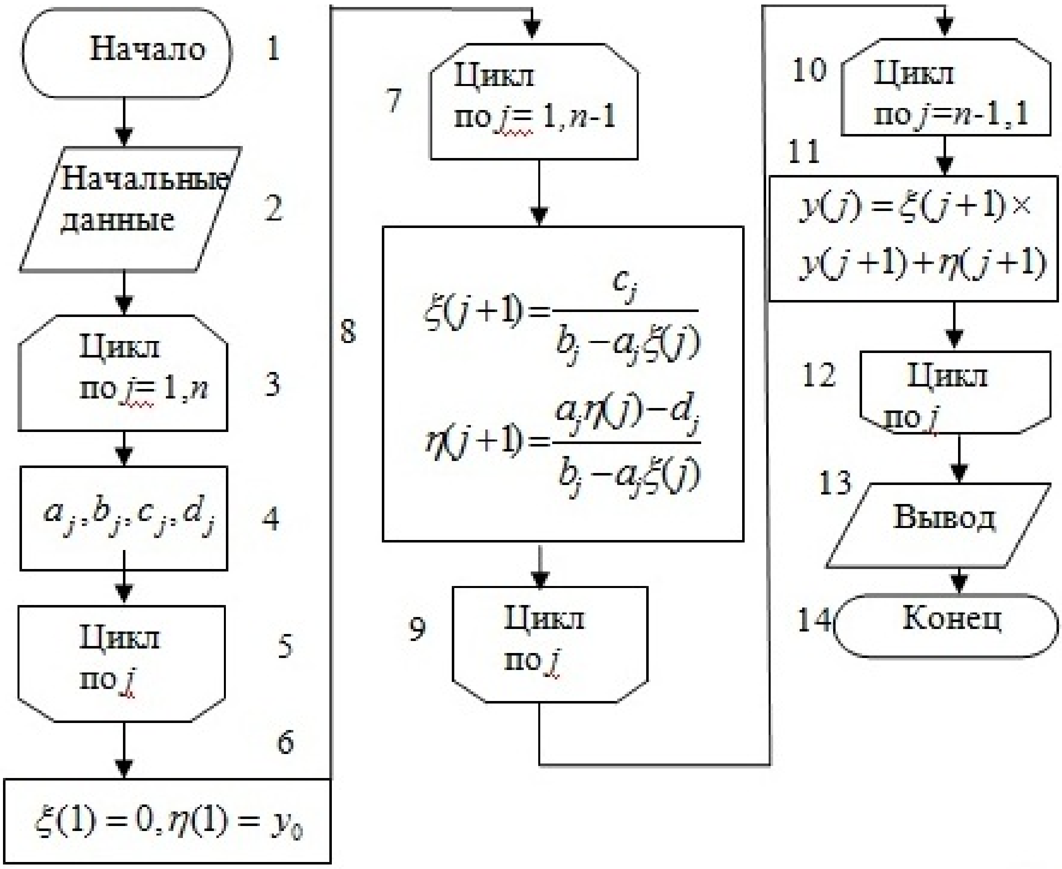

Рисунок 2 Блок-схема программы модели Кейнса.

Заключение. В данной работе была затронута тема "Неклассическая сплайн - аппроксимация в численном анализе динамической модели Кейнса".

В ходе проделанной работы мы изучили некоторые динамические модели экономических процессов и принципы их математического моделирования; провели исследование численных методов решения дифференциальных уравнений на основе функций Хаара, построили алгоритм нахождения приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, показали теоретическое обоснование сходимости приближенных решений к точному решению задачи Коши.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. / М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1976. С. 248

2. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании:учебник - 2-е изд., испр. / М.: Издательство Дело, 2001. С. 688

3. Колемаев, В.А. Математическая экономика:Учебник для вузов - 2-е изд., перераб. и доп. / М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. С. 399

4. Кашин, Б.С., Саакян, А.А. 2-е изд., доп. Ортогональные ряды. / М.: Издательство АФЦ, 1999. С. 560

5. Здрогова, М.А., Лукомский, Д.С., Недробов, Н.С., Терехин, П.А., Царева, В.Г. Применение функций Хаара к численному решению линейных дифференциальных уравнений / Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования, материалы международной научно-практической конференции, 26-28 апреля 2016 года / под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина. – Рязань, 2016. С. 89-91