

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиоп физики и нелинейной динамики

**Пространственные структуры в цепочке бистабильных кубических  
отображений с нелокальной связью**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4-го курса 421 группы  
Направления 03.03.03. - Радиоп физика  
Физического факультета

Афанасьева Михаила Владимировича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Т.Е.Вадивасова.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ В.С.Анищенко.

Саратов 2017

## Характеристика работы

Работа посвящена изучению пространственных структур в ансамбле кубических отображений с нелокальным взаимодействием. Особое внимание уделяется сложным пространственным структурам, таким как химеры и уединенные состояния.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в том, чтобы методами численного моделирования исследовать поведение ансамбля кубических отображений с нелокальными связями при вариации параметров и определить условия возникновения таких режимов, как химерные структуры и уединенные состояния.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, дается общее представление о пространственных структурах в ансамблях нелинейных систем и особых типах структур, таких, как химеры и уединенные состояния, определяется понятие бистабильной системы и обсуждается возможность возникновения химер в ансамблях бистабильных систем с нелокальной связью, дается обзор научной литературы по теме работы, формулируется цель работы.

Мультистабильность – это одно из фундаментальных нелинейных явлений. Оно состоит в существовании у динамической системы нескольких аттракторов, со своими бассейнами притяжения. Если таких состояний два, то говорят о явлении бистабильности. В простейшем случае бистабильный осциллятор представляет собой систему с двумя устойчивыми точками равновесия. Бистабильность встречается в задачах радиоэлектроники, оптики, лазерной спектроскопии, химии, биологии, нейродинамики, полимерных материалов и во многих других областях науки.

Взаимодействующие бистабильные осцилляторы могут формировать активную бистабильную среду, в которой существует автоволновой процесс переключательного типа. При определенных условиях в бистабильных системах и средах можно наблюдать незатухающие бегущие волны. Для бистабильных сред и ансамблей бистабильных элементов характерно образование пространственных структур, как регулярных, так и неупорядоченных.

В последние годы был обнаружен и исследован новый тип структур в ансамблях активных элементов, получивший название химер. Такие состояния характерны для ансамблей нелинейных осцилляторов с нелокальными связями. Главной отличительной чертой химерных структур является наличие в ансамбле из идентичных элементов групп (кластеров) осцилляторов с качественно различным поведением. Осцилляторы, состояния которых близки к синфазной синхронизации, составляют когерентные кластеры, в то время как осцилляторы с нерегулярно распределенными состояниями образуют некогерентные кластеры.

Интерес к химерным состояниям, вызван, с одной стороны, их типичностью для широкого класса нелинейных ансамблей с нелокальными связями, а с другой, важной ролью подобных моделей при математическом моделировании реальных многокомпонентных систем и протекающих в них процессов в таких областях, как биофизика, нейродинамика, экология, социология, компьютерные и энергетические сети.

Интересным является вопрос о связи химер с мультистабильностью. Некоторые виды химер, такие как неподвижные химерные структуры (*chimera death*) и фазовые химеры в ансамблях хаотических систем, связаны с динамической мультистабильностью, возникающей в результате взаимодействия элементов. Можно предположить, что в ансамблях, элементы которых обладают собственной мультистабильностью, химерные структуры представляют собой типичное явление. Однако структуры в

ансамблях мультистабильных (в простейшем случае -- бистабильных) осцилляторов с нелокальным взаимодействием почти не исследовались. Имеется несколько работ, в которых описаны химеры в ансамблях элементов с бистабильной динамикой, однако особенности химерных структур, связанные именно с бистабильностью не были в центре внимания.

Кроме химерных структур в ансамблях с нелокальным взаимодействием недавно был обнаружен новый тип структуры, названный уединенными состояниями (solitary states). Для такой структуры нельзя выделить целого кластера элементов, отличающихся по своему поведению от остальных. Выделяются только отдельно взятые элементы, находящиеся в особом, отличном от всех остальных, состоянии. Уединенные состояния изучены еще сравнительно мало. По-видимому, для их формирования важен нелокальный характер связи. В ансамблях бистабильных элементов уединенные состояния, по-видимому, также могут возникать.

**В разделе 1 приводится описание исследуемого ансамбля кубических отображений с нелокальной связью.**

Исследуется ансамбль, составленный из элементов, описываемых кубическим отображением. Такое отображение является простейшим примером системы с бистабильной динамикой. Элементы ансамбля связаны между собой не локально, т.е. каждый элемент взаимодействует с  $P$  соседями слева и с  $P$  соседями справа. Данная модель описывается системой уравнений:

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{j=i+P} [f(x_j(n)) - f(x_i(n))] \quad j = 1, \dots, N \quad (1)$$

где

$$f(x) = (\alpha x - x^3) \exp \left\{ -\frac{x^2}{\beta} \right\}$$

есть функция, задающая отображение последования для изолированного элемента цепочки,  $x_i$  – динамическая переменная, задающая состояние  $i$ -го элемента цепочки,  $i$  -- номер элемента в цепочке (дискретная пространственная координата),  $n$  – номер итерации (дискретное время),  $\alpha$  и  $\beta$  -- управляющие параметры системы,  $\sigma$  -- сила связи. Число элементов в ансамбле было выбрано равным  $N=1000$ . Граничные условия полагались периодическими. Параметр  $\beta$  фиксировался равным  $10$ . По аналогии с другими подобными работами вводится радиус связи  $r=P/N$ , характеризующий степень нелокальности взаимодействия.

Кубическое отображение может демонстрировать как регулярное, так и хаотическое поведение в зависимости от параметра  $\alpha$ .

В **Разделе 2** представлена практическая часть работы. Были проведены исследования системы (1) при различных режимах динамики элементов. В качестве управляющих параметров ансамбля (1) рассматривались радиус связи  $r$  и сила связи  $\sigma$ . При расчетах начальные условия фиксировались всегда одинаковыми и представляли собой реализацию множества случайных значений  $x_i(0)$ , распределенных между бассейнами двух равновесий.

Рассмотрим пространственные структуры, существующие в системе (1) при значении параметра  $\alpha=1.9$ , что соответствует существованию двух устойчивых точек равновесия (неподвижных точек) в отдельно взятом кубическом отображении. В результате проведенных исследований были установлены пять различных типов пространственных структур: 1) нерегулярные пространственные структуры; 2) однородные пространственные структуры; 3) неподвижные химеры; 4) пространственные структуры с гладким профилем; 5) уединенные состояния. Области существования различных структур на плоскости параметров «радиус связи, сила связи» приведены на диаграмме, рис.2. Уединенные состояния при  $\alpha=1.9$  наблюдается только при глобальной связи элементов ( $r=0.5$ ).

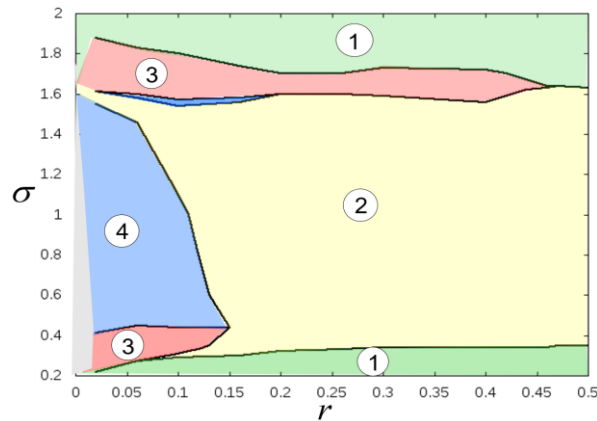


Рис. 1. Диаграмма режимов системы (1) на плоскости параметров  $r$ ,  $\sigma$  при  $\alpha=1.9$ . Отмечены следующие области: 1 – нерегулярные пространственные структуры; 2 – однородные пространственные структуры; 3 – химеры; 4 – структуры с гладким профилем

Образование химер в ансамбле бистабильных элементов связано с распределением элементов между окрестностями двух точек равновесия. Элементы в когерентных кластерах находятся в окрестности одной и той же точки равновесия, а в некогерентных кластерах нерегулярно распределены между окрестностями двух равновесий.

На рис.2 приведена эволюция пространственных структур с ростом силы связи  $\sigma$  при радиусе связи  $r=0.02$ . Можно выделить нерегулярные пространственные структуры при малых значениях  $\sigma$  ( $\sigma=0.22$ ), сложные химерные структуры с большим числом когерентных и некогерентных кластеров ( $\sigma=0.27$ ), структуры с гладким профилем ( $\sigma=0.42$ ), пространственно-однородные структуры ( $\sigma=1.56$ ). При больших значениях  $\sigma$  наблюдается переход от пространственно-однородной структуры снова к сложным структурам типа химер ( $\sigma=1.62$ ) и полному пространственному беспорядку ( $\sigma=1.88$ ). Переход к неоднородным структурам при большой силе связи объясняется тем, что элементы ансамбля начинают колебаться, совершая переходы между окрестностями точек равновесия. Динамика во времени элемента ансамбля с номером  $i=1$  для различных значений  $\sigma$  приведена на рис.3.

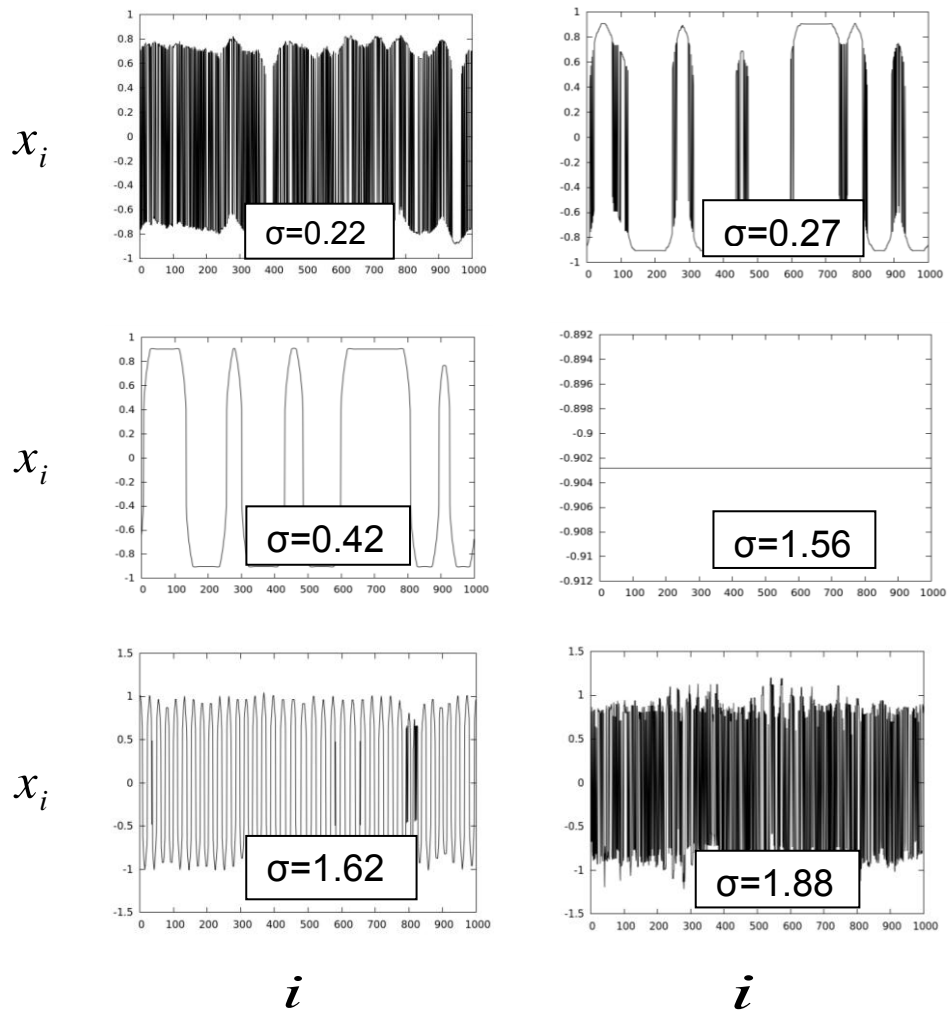


Рис.2. Эволюция пространственного профиля с ростом параметра связи в ансамбле (1) при  $\alpha=1.9$  и  $r=0.02$

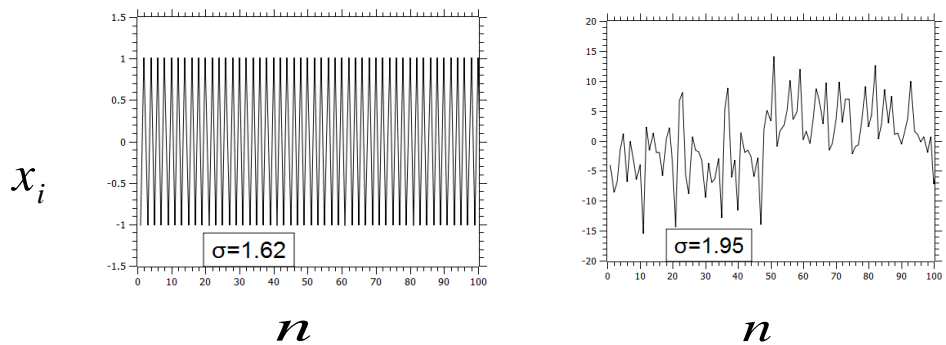


Рис.3. Эволюция колебаний в фиксированном элементе ансамбля  $i=1$  с ростом параметра связи при  $\alpha=1.9$  и  $r=0.02$

Примеры пространственных структур при  $r=0.1$  показаны на рис.4. При глобальной связи ( $r=0.5$ ) химеры не возникают, а вместо них появляются структуры с уединенными состояниями (рис.5).

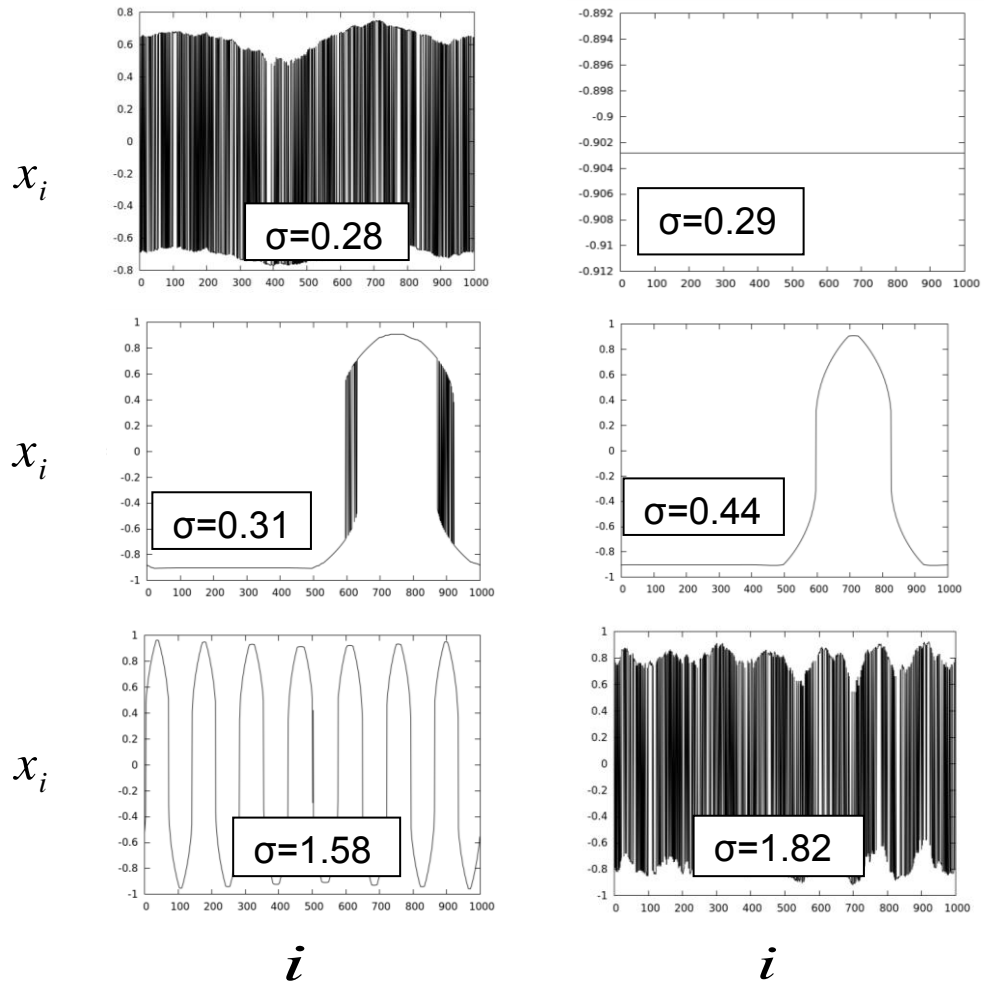


Рис.4. Эволюция пространственного профиля с ростом параметра связи в ансамбле (1) при  $\alpha=1.9$  и  $r=0.1$

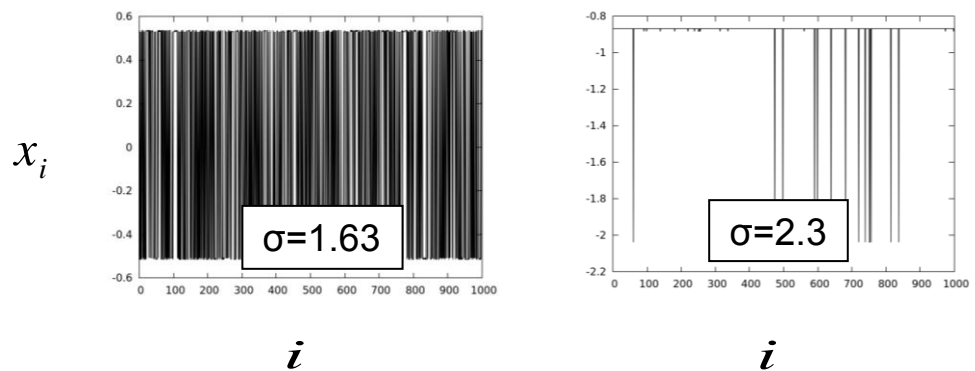


Рис.5. Эволюция пространственного профиля с ростом параметра связи в ансамбле (1) при  $\alpha=1.9$  и  $r=0.5$

Были исследованы пространственные структуры и колебания во времени в системе (1) при  $\alpha=2.4$ , что соответствует существованию двух предельных циклов периода 4 в отдельно взятом кубическом отображении.



В этом режиме наблюдаются те же самые пять типов пространственных структур. Области их существования на плоскости параметров «радиус связи -- сила связи» приведены на диаграмме, изображенной на рис.6.

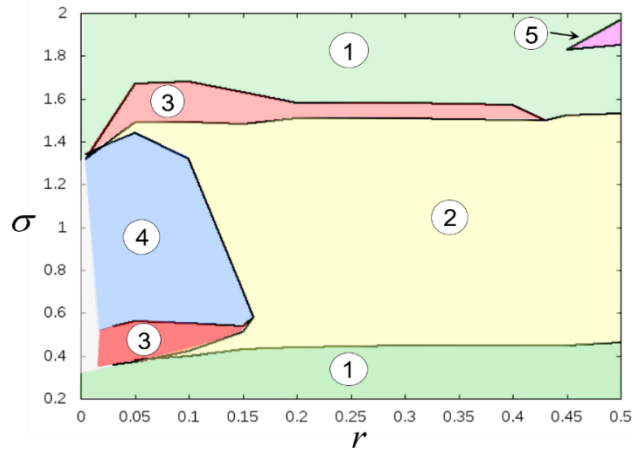


Рис.6. Диаграмма режимов системы (1) на плоскости параметров  $r$ ,  $\sigma$  при  $\alpha=2.4$ . Отмечены следующие области: 1–нерегулярные пространственные структуры; 2 – однородные пространственные структуры; 3 – химеры; 4 – структуры с гладким профилем; 5 – уединенные состояния

Диаграмма режимов при  $\alpha =2.4$  похожа на аналогичную диаграмму, полученную при  $\alpha =1.9$  (рис.1). Отличие состоит в том, что теперь уединенные состояния наблюдаются не только при глобальной связи, но и при связи достаточно близкой к глобальной. На рис.7 приведена эволюция мгновенного пространственного профиля с ростом параметра  $\sigma$  при  $r=0.1$ .

При  $\alpha =2.4$  пространственные структуры для большинства значений силы связи не являются неподвижными. Поведение во времени фиксированного элемента с номером  $i=1$  при  $r=0.1$  при некоторых значениях  $\sigma$  показано на рис.8. При  $\alpha=2.4$  также наблюдаются уединенные состояния. Они существуют не только при глобальной связи ( $r=0.5$ ), но и при связи, близкой к глобальной ( $r=0.45$ ). Химеры для  $r \geq 0.45$  не наблюдаются.

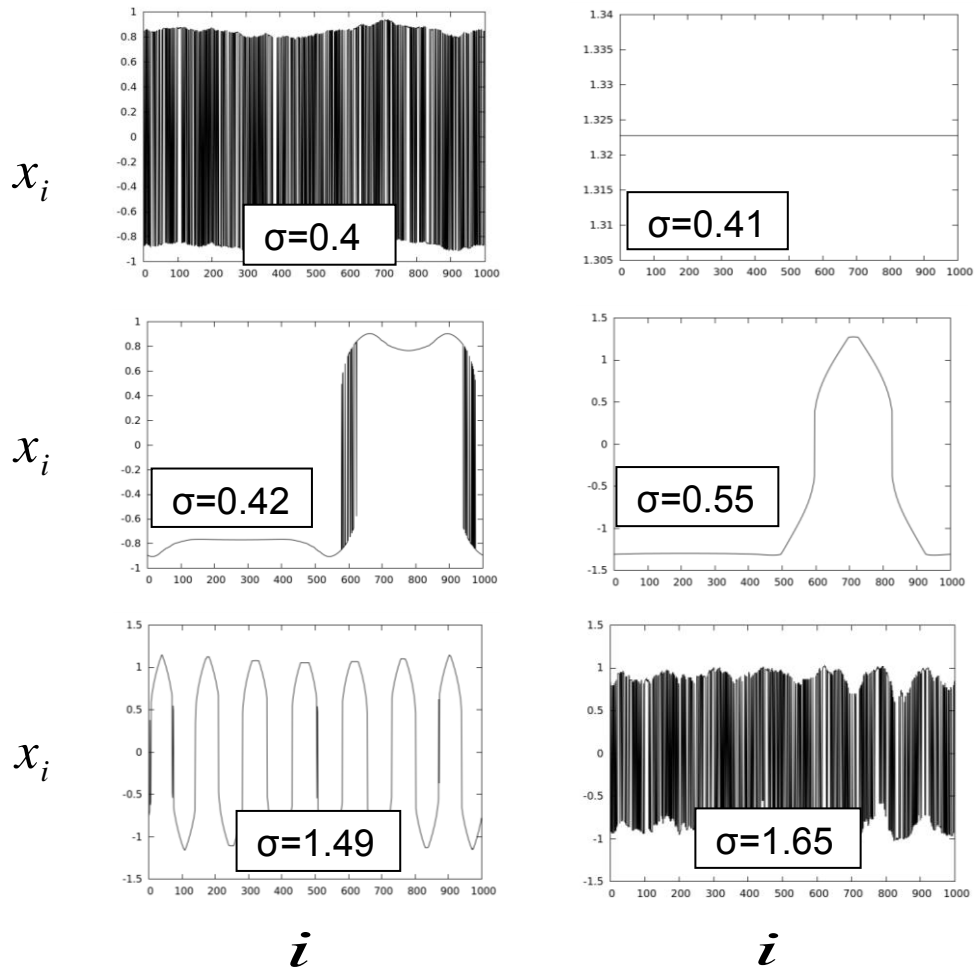


Рис.7. Эволюция мгновенного пространственного профиля с ростом параметра связи в ансамбле (1) при  $\alpha=2.4$  и  $r=0.1$

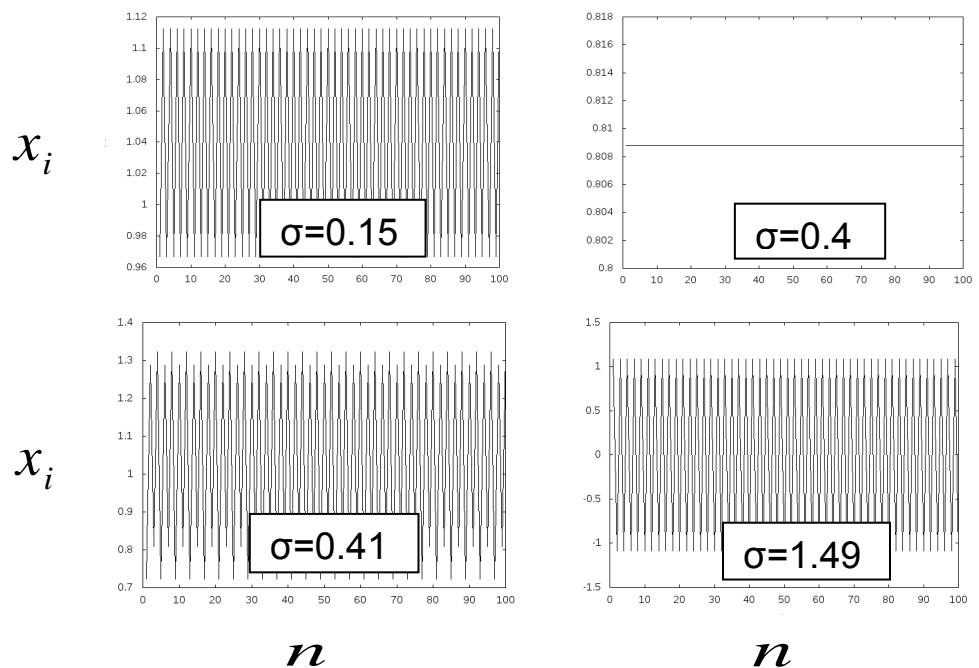


Рис.8. Эволюция колебаний в фиксированном элементе ансамбля  $i=1$  с ростом параметра связи при  $\alpha=2.4$  и  $r=0.1$

Наконец, было исследовано поведение ансамбля (1) при  $\alpha=2.9$ , что соответствует режиму объединенного хаотического аттрактора в отдельно взятом кубическом отображении.

На рис.9 показана эволюция режима с ростом  $\sigma$  при  $r=0.1$ . При малых  $\sigma$  наблюдается нерегулярная пространственная структура, сначала хаотическая во времени (на рис.9 не показано), а затем неподвижная ( $\sigma=0.45$ ). Далее возникают химеры с хаотическими колебаниями во времени в окрестности одного из равновесий (например, при  $\sigma=0.50$ ). Затем происходит переход к гладкому пространственному профилю и периодическим колебаниям во времени ( $\sigma=0.68$ ), которые далее становятся хаотическими. С ростом  $\sigma$  возникает амплитудная химера ( $\sigma=1.4$ ). При этом все элементы ансамбля в один момент времени находятся в окрестности одной и той же точки равновесия, а колебания во времени, напротив, сопровождаются хаотическими переключениями между окрестностями двух равновесий. При больших  $\sigma$  снова возникают химеры с распределением элементов между окрестностями равновесий и нерегулярные пространственные структуры.

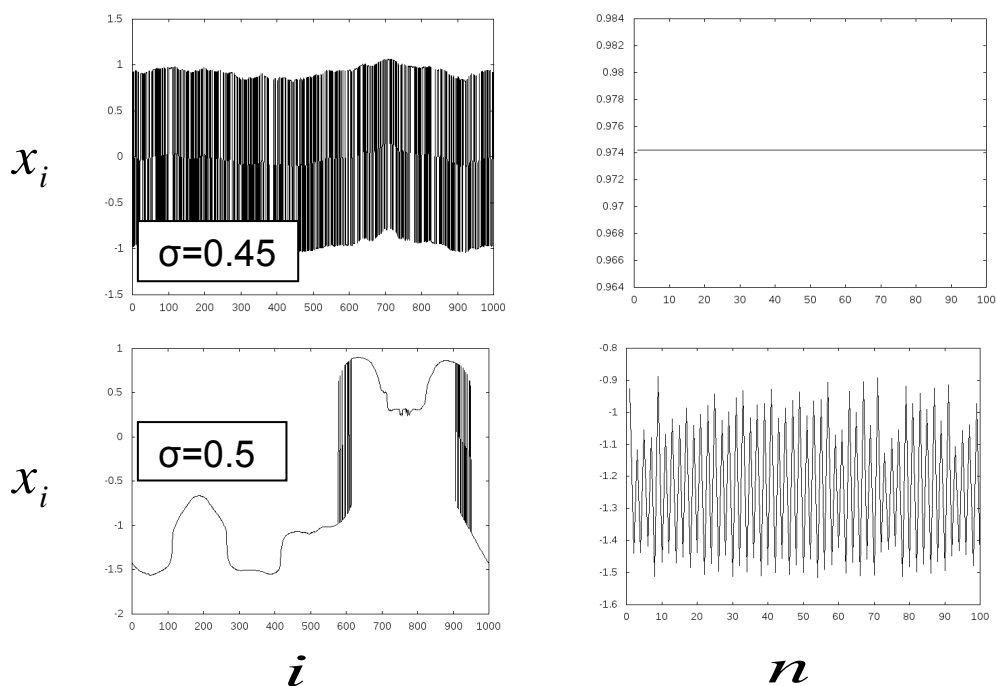


Рис.9. Эволюция режимов в ансамбле (1) с ростом  $\sigma$  при  $\alpha=2.9$

и  $r = 0.1$ : мгновенные пространственные профили (слева) и колебания во времени элемента с номером  $i=1$  (справа)

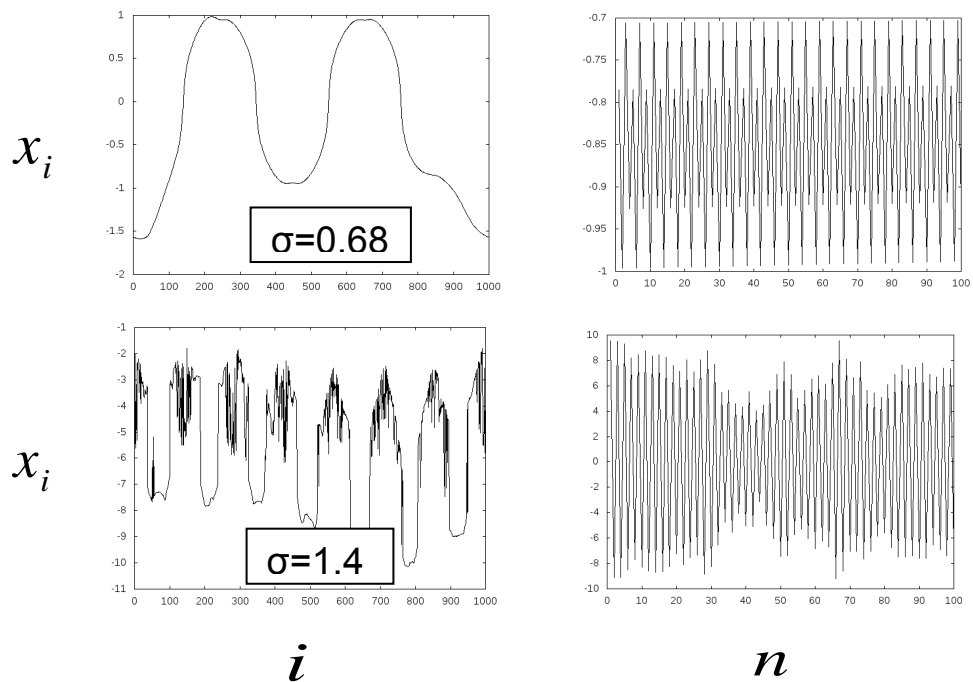


Рис.9 (продолжение). Эволюция режимов в ансамбле (1) с ростом  $\sigma$  при  $\alpha=2.9$  и  $r = 0.1$ : мгновенные пространственные профили (слева) и колебания во времени элемента с номером  $i=1$  (справа)

Глобальная связь ( $r=0.5$ ) приводит к полному исчезновению химерных структур. Вместо них типичными становятся структуры с уединенными состояниями.

В заключении приводятся основные результаты работы.

1. Показано, что во всех трех исследованных динамических режимах элементов ансамбля при случайном выборе начальных условий нелокальная связь приводит к появлению химерных структур особого типа, состоящих из когерентных кластеров, элементы которых находятся в окрестности одной и той же точки равновесия и некогерентных кластеров, элементы которых нерегулярно распределяются между этими окрестностями.
2. Химерные структуры, возникающие на основе бистабильности, могут сопровождаться различным поведением элементов ансамбля во времени:

может наблюдаться отсутствие колебаний (неподвижные химерные структуры); периодические колебания или хаотическая динамика.

3. Химеры возникают в том случае, если связь существенно не локальна (радиус связи  $r$  не слишком мал) и не близка к глобальной (радиус связи  $r$  не слишком близок к значению 0.5). Обнаружены две области химерных структур на плоскости параметров «сила связи-радиус связи» приблизительно соответствующие значениям силы связи  $\sigma$  в интервалах [0.3; 0.4] и [1.6; 1.8]. Появление «верхней области» связано с возникновением колебаний большой амплитуды, соответствующих переключениям между окрестностями двух равновесий отдельного элемента.

4. Если связь является глобальной или близкой к глобальной, то химерные структуры в ансамбле кубических отображений не возникают. Вместо них наблюдаются структуры с уединенными состояниями.

В конце работы приводится **список используемых источников**, включающий 39 наименований.