Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Обратная спектральная задача Штурма-Лиувилля на полуоси

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 - Прикладная математика и информатика___________________
код и наименование направления

________________механико-математического факультета__________________________
наименование факультета, института, колледжа

____________________Черкашиной Надежды Владимировны___________________
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент	__________________	___С.А. Бутерин______
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф-м.н., профессор_________	____________________	_________В.А. Юрко________
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Данная магистерская работа посвящена получению решение обратной спектральной задачи Штурма-Лиувилля на полуоси с краевыми условиями Дирихле. Актуальность темы обусловлена тем, что интерес к ней постоянно увеличивается благодаря появлению все новых приложений. В настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники.

Исследование обратных спектральных задач связано с тремя основными этапами:

1. выяснение того, какие спектральные данные однозначно определяют оператор, и доказательство соответствующих теорем единственности;

2. конструктивное решение обратной задачи: разработка метода решения и построение алгоритма восстановления оператора по рассматриваемым спектральным данным;

3. нахождение характеристических свойств рассматриваемых спектральных данных, получение необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи.

Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов, и в частности в теории обратных задач, получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля

$$y'' + q(x)y.$$

Первые исследования по спектральной теории операторов данного вида были выполнены Д. Бернулли, Даламбером, Эйлером, Лиувиллем и Штурмом и связаны с решением уравнения, описывающего колебания струны. Рассматриваемые в работе краевые условия соответствуют случаю, когда конец струны закреплен, что представляет большой интерес с точки зрения приложений. В настоящее время появляется все больше новых сфер приложений данной тематики, поэтому результаты представленной работы обладают научной значимостью и новизной.

Структура основной части выпускной квалификационная работы выглядит следующим образом. Работа состоит из трех глав.

1. «Решение Йоста и Биркгофа».

Глава посвящена исследованию свойств вышеупомянутых решений оператора Штурма-Лиувилля на полуоси.

2. «Спектральные свойства оператора Штурма-Лиувилля на полуоси».

В данной главе изучаются свойства спектра. В качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается функция Вейля.

3. «Обратная задача».

Строится решение обратной задачи и доказывается его единственность. Получен алгоритм решения обратной задачи. Доказана однозначная разрешимость основного уравнения, решение которого используется для восстановления дифференциального оператора по спектральным данным.

Основное содержание работы. Рассмотрим линейную форму $L = L(q(x))$ и дифференциальное уравнение

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $q(x) \in L(0, \infty)$ – комплекснозначная функция, называемая потенциалом. Пусть спектральный параметр $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + i\tau$. Оператор l называется оператором Штурма-Лиувилля. Также для определенности $\tau := Im\,\rho \geq 0$. Через Π обозначим λ- плоскость с разрезом $\lambda \geq 0$, а $\Pi_1 = \overline{\Pi} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \to \rho^2 = \lambda$, Π_1 соответствует множеству $\Omega = \{\rho : Im\,\rho \geq 0, \rho \neq 0\}$. Положим $\Omega_\delta = \{\rho : \ Im\,\rho \geq 0, |\rho| \geq \delta\}$. Через W_N обозначим множество функций $f(x)$, $x \geq 0$ таких, что функции $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$ абсолютно непрерывны на $[0, T]$ при каждом фиксированном $T > 0$, и $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$, $j = \overline{0, N}$.

Для уравнения (1) в Ω с асимптотическим поведением на бесконечности типа $\exp(\pm i\rho x)$ построим специальные ФСР (фундаментальные системы решений).

Решение Йоста. Уравнение (1) имеет единственное решение, $y = e(x, \rho)$, $\rho \in \Omega$, $x \geq 0$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) - \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty (\exp(i\rho(x-t)) - \exp(i\rho(t-x)))\, q(t) e(t, \rho)\, dt. \tag{3}$$

Свойства функции $e(x, \rho)$:

1. При $x \to \infty$, $\nu = 0, 1$ и каждом фиксированном $\delta > 0$

$$e^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)(1 + o(1)) \tag{4}$$

равномерно в Ω_δ. При $Im\, \rho > 0$ $e(x, \rho) \in L_2(0, \infty)$, причем $e(x, \rho)$ является единственным решением уравнения (1) (с точностью до постоянного множителя) с этим свойством.

2. При $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega$, $\nu = 0, 1$

$$e^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)\Big(1 + \frac{\omega(x)}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \quad \omega(x) := -\frac{1}{2} \int_x^\infty q(t)\, dt \tag{5}$$

равномерно по $x \geq 0$.

3. При фиксированных $x \geq 0$ и $\nu = 0, 1$ функции $e^{(\nu)}(x, \rho)$ регулярны при $Im\, \rho > 0$ и непрерывны при $\rho \in \Omega$.

4. При вещественном $\rho \neq 0$ функции $e(x, \rho)$ и $e(x, -\rho)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), причем

$$\langle e(x, \rho), e(x, -\rho) \rangle = -2i\rho, \tag{6}$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ – вронскиан функций y и z. Функция $e(x, \rho)$ называется *решением Йоста* уравнения (1).

Решение Биркгофа. Для каждого $\delta > 0$ существует $a = a_\delta \geq 0$ такое, что уравнение (1) имеет единственное решение $y = E(x, \rho)$, при $\rho \in \Omega_\delta$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$E(x,\rho) = \exp(-i\rho x) + \frac{1}{2i\rho}\int_a^x \exp(i\rho(x-t))q(t)E(t,\rho)\,dt+ \\ +\frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty \exp(i\rho(t-x))q(t)E(t,\rho)\,dt. \tag{7}$$

Функция $E(x,\rho)$, называемая решением Биркгофа для (1), имеет следующие свойства:
(i_1) $E^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)(1+o(1)),\ x\to\infty\ \nu=0,1$, равномерно по $|\rho|\ge\delta$, $Im\,\rho\ge\alpha$ при каждом фиксированном $\alpha>0$;
(i_2) $E^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)(1+O(\rho^{-1})),\ |\rho|\to\infty\ \rho\in\Omega$ равномерно по $x\ge a$;
(i_3) при каждом фиксированном $x\ge 0$ функции $E^{(\nu)}(x,\rho)$ регулярны при $Im\,\rho>0$, $|\rho|\ge\delta$ и непрерывны при $\rho\in\Omega_\delta$;
(i_4) функции $e(x,\rho)$, $E(x,\rho)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), причем $\langle e(x,\rho), E(x,\rho)\rangle = -2i\rho$;
(i_5) *если* $\delta\ge Q_0(0)$, *то можно брать* $a=0$.

Спектральные свойства оператора Штурма-Лиувилля на полуоси. Обозначим

$$\Delta(\rho) = e(0,\rho). \tag{8}$$

Функция $\Delta(\rho)$ аналитична при $Im\,\rho>0$ и непрерывна при $\rho\in\Omega$. Из (5) следует, что при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\Omega$ имеет место асимптотическая формула

$$\Delta(\rho) = e(0,\rho) = 1 + \frac{\omega(0)}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{9}$$

Можно получить более точно:

$$\Delta(\rho) = e(0,\rho) = 1 - \frac{1}{2i\rho}\int_0^\infty (1-\exp(2i\rho t))q(t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big). \tag{10}$$

Обозначим

$$\Lambda = \{\lambda=\rho^2 : \rho\in\Omega,\ \Delta(\rho)=0\},$$

$$\Lambda' = \{\lambda=\rho^2 :\ Im\,\rho>0,\ \Delta(\rho)=0\},$$

$$\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 : \ Im\,\rho = 0,\ \rho \neq 0,\ \Delta(\rho) = 0\}.$$

Очевидно, что $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ – ограниченное множество, а Λ' – ограниченное не более чем счетное множество. Обозначим

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{e(x,\rho)}{\Delta(\rho)} = \frac{e(x,\rho)}{e(0,\rho)}. \tag{11}$$

Функция $\Phi(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) и, в силу (8), также условиям

$$\Phi(0,\lambda) = \frac{e(0,\rho)}{e(0,\rho)} = 1, \tag{12}$$

$$\Phi(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x)), \quad x \to \infty,\ \rho \in \Omega. \tag{13}$$

Функция $\Phi(x,\lambda)$ называется *решением Вейля* для L. Отметим, что (1), (12) и (13) однозначно определяют решение Вейля.

Положим $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$. Функция $M(\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L. Из (11) вытекает

$$M(\lambda) = \frac{e'(0,\rho)}{\Delta(\rho)}. \tag{14}$$

Ясно, что

$$\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + M(\lambda)S(x,\lambda), \tag{15}$$

где функции $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ являются решениями (1) при начальных условиях

$$C(0,\lambda) = 1,\ C'(0,\lambda) = 0, \quad S(0,\lambda) = 0,\ S'(0,\lambda) = 1.$$

По формуле Остроградского-Лиувилля вронскиан $\langle S(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle$ не зависит от x. Так как при $x = 0$

$$\langle S(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle_{|x=0} = S(0,\lambda)\Phi'(0,\lambda) - S'(0,\lambda)\Phi(0,\lambda) = -1,$$

то получаем

$$\langle S(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle \equiv -1. \tag{16}$$

Определение 1. Множество особенностей функции Вейля $M(\lambda)$ называется спектром L. Те значения λ, при которых уравнение (1) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям $y(0) = 0$, $y(\infty) = 0$ (т.е. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$), называются собственными значениями L, а соответствующие решения называются собственными функциями.

Теорема 1. Пусть $\lambda_0 \notin [0, \infty)$. Для того, чтобы λ_0 было собственным значением, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(\rho_0) = 0$. Другими словами, множество ненулевых собственных значений совпадает с Λ'. Каждому собственному значению $\lambda_0 \in \Lambda'$ соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция, а именно:

$$e(x, \rho_0) = \beta_0 S(x, \lambda_0), \quad \beta_0 \neq 0. \tag{17}$$

Таким образом, спектр L состоит из положительной полуоси $\{\lambda : \ \lambda \geq 0\}$ и дискретного множества $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$. Каждый элемент множества Λ' является собственным значением L. Точки множества Λ'' не являются собственными значениями L; они называются *спектральными особенностями* L.

Пример 1. Пусть $q(x) \equiv 0$. Тогда $\Delta(\rho) = 1$.

Из (5), (9), (11) и (14) следует, что при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega$ имеют место асимптотические формулы

$$M(\lambda) = e'(0, \rho) = i\rho \left(1 + \frac{\omega(0)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{18}$$

$$\Phi^{(\nu)}(x, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x) \left(1 + \frac{\omega(x)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{19}$$

равномерно по $x \geq 0$, причем

$$\omega(x) = -\frac{1}{2} \int_x^\infty q(s)\, ds.$$

Учитывая (10), можно получить более точно:

$$M(\lambda) = i\rho \left(1 - \frac{1}{2i\rho} \int_0^\infty (1 + \exp(2i\rho t)) q(t) dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \quad |\rho| \to \infty, \ \rho \in \Omega. \tag{20}$$

Обозначим

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left(M^-(\lambda) - M^+(\lambda)\right), \quad \lambda > 0, \tag{21}$$

где

$$M^\pm(\lambda) = \lim_{z\to 0,\, Re\, z>0} M(\lambda \pm iz).$$

Из (18), (21) вытекает, что при $\rho > 0$, $\rho \to +\infty$:

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\Big(-i\rho\Big(1 - \frac{\omega(0)}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big) - i\rho\Big(1 + \frac{\omega(0)}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)\Big),$$

и следовательно,

$$V(\lambda) = -\frac{\rho}{\pi}\left(1 + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad \rho > 0,\ \rho \to +\infty.$$

Используя (20), вычисляем более точно:

$$V(\lambda) = -\frac{\rho}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2\rho}\int_0^\infty q(t)\sin 2\rho t\, dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \quad \rho > 0,\ \rho \to +\infty. \tag{22}$$

Обратная задача. При исследовании обратных задач математической физики первостепенную значимость имеет доказательство соответствующих теорем существования и единственности решения.

Вместе с L будем рассматривать $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x))$ аналогичного вида. Тогда если некоторый объект γ относится к L, то $\tilde{\gamma}$ – к $\tilde{L}$, а $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Верна следующая теорема.

Теорема единственности решения обратной задачи. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет $q(x)$.

Построение решения обратной задачи. Будем говорить, что $L \in V_N$, если $q(x) \in W_N$. Обратную задачу будем решать в классах V_N.

Пусть $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x))$ выбрано так, что

$$\int_{\rho^*}^\infty |\hat{V}(\lambda)|^2\, d\rho < \infty, \quad \hat{V} := V - \tilde{V} \tag{23}$$

при достаточно большом $\rho^* > 0$. Так как

$$V(\lambda) = -\frac{\rho}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2\rho}\int_0^\infty q(t)\sin 2\rho t\,dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \quad \rho > 0,\ \rho \to +\infty \tag{24}$$

$$\hat{V}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{q}(t)\sin 2\rho t\,dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

то (23) не является жестким ограничением. В частности, если $q(x) \in L_2$, то (23) выполняется автоматически для любой $\tilde{q}(x) \in L_2$. При $N \geq 1$ условие (23) также выполняется для любого $\tilde{L} \in V_N$.

Из (23) вытекает

$$\int_{\lambda^*}^\infty |\hat{V}(\lambda)|\,d\lambda = 2\int_{\rho^*}^\infty \rho|\hat{V}(\lambda)|\,d\rho < \infty, \quad \lambda^* = (\rho^*)^2,\ \lambda = \rho^2. \tag{25}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} D(x,\lambda,\mu) &= \frac{\langle S(x,\lambda), S(x,\mu)\rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x S(t,\lambda)S(t,\mu)\,dt, \\ \tilde{D}(x,\lambda,\mu) &= \frac{\langle \tilde{S}(x,\lambda), \tilde{S}(x,\mu)\rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x \tilde{S}(t,\lambda)\tilde{S}(t,\mu)\,dt, \\ r(x,\lambda,\mu) = D(x,\lambda,\mu)&\hat{M}(\mu), \quad \tilde{r}(x,\lambda,\mu) = \tilde{D}(x,\lambda,\mu)\hat{M}(\mu). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Лемма 1. Имеют место оценки

$$|D(x,\lambda,\mu)|,\ |\tilde{D}(x,\lambda,\mu)| \leq \frac{C_x \exp(|Im\,\rho|x)}{|\rho\theta|(|\rho \mp \theta| + 1)}, \quad \lambda = \rho^2,\ \mu = \theta^2 \geq 0,\ \pm\theta Re\,\rho \geq 0. \tag{27}$$

Теорема 2. Справедливы соотношения

$$\tilde{S}(x,\lambda) = S(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tilde{r}(x,\lambda,\mu)S(x,\mu)\,d\mu, \tag{28}$$

$$r(x,\lambda,\mu) - \tilde{r}(x,\lambda,\mu) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tilde{r}(x,\lambda,\xi)r(x,\xi,\mu)\,d\xi = 0. \tag{29}$$

Уравнение (28) называется основным уравнением обратной задачи.

Аналогичным образом выводится соотношение

$$\tilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x,\lambda), \tilde{S}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\hat{M}(\mu)S(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda \in J_\gamma. \quad (30)$$

Обозначим

$$\varepsilon_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tilde{S}(x,\mu)S(x,\mu)\hat{M}(\mu)\,d\mu, \quad \varepsilon(x) = -2\varepsilon_0'(x). \quad (31)$$

Теорема 3. Справедливо соотношение

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x), \quad (32)$$

Алгоритм решения обратной задачи. *Пусть задана функция $M(\lambda)$.*
(1) Выбираем $\tilde{L} \in V_N$ так, что верно (23).
(2) Находим $S(x,\lambda)$ из основного уравнения (28).
(3) Строим $q(x)$ по формулам (31)-(32).

Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Через $\mathbf{W}$ обозначим множество функций $M(\lambda)$ таких, что
(i) $M(\lambda)$ аналитична в Π за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов Λ' и непрерывна в Π_1 за исключением ограниченного множества Λ (Λ и Λ' свои для каждой функции $M(\lambda)$);
(ii) при $|\lambda| \to \infty$ имеет место (18).

Теорема 4. Для того, чтобы функция $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ была функцией Вейля для некоторой пары $L \in V_N$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:
1) (асимптотика) существует $\tilde{L} \in V_N$ такое, что выполняется (23);
2) (условие P) при каждом фиксированном $x \geq 0$ уравнение (28) имеет единственное решение $S(x,\lambda) \in C(\gamma)$;
3) $\varepsilon(x) \in W_N$, где функция $\varepsilon(x)$ определяется формулой (31).
При этих условиях $q(x)$ строится по формуле (32).

Заключение. В данной работе была исследована обратная спектральная задача Штурма-Лиувилля на полуоси с краевыми условиями Дирихле. Получено решение рассматриваемой обратной задачи, доказана его единственность. Был получен алгоритм, с помощью которого может быть найдено решение обратной задачи, а так же доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.