Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Разложение функции по системам Хаара и Фабера - Шаудера

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Шевченко Марии Алексеевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Д. С. Лукомский
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Последовательность функций $\{\chi_n(x)\}$, называемых функциями Хаара, была построена в диссертации венгерского математика А.Хаара. В 1909 году он построил полную систему ортонормированных функций, пригодную для спектрального представления интегрируемых функций, определенных на интервале $(0, 1)$, разбиваемом на двоично-рациональное число $N = 2^n$, где $n = 1, 2...$ подинтервалов знакопостоянства.

Это была первая ортогональная система со следующим замечательным свойством: любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы [1] :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x).$$

Изначально область применения функций Хаара ограничивалась теорией функции и функциональным анализом, где использовался тот факт, что система $\{\chi_n(x)\}$ образует базис в некоторых функциональных пространствах. В дальнейшем функции Хаара исследовались во многих работах, большинство этих работ связаны с теорией функции действительного переменного и с теорией ортогональных рядов, а также они находят применение в прикладной математике. Функции Хаара используются для построения интерполяционных формул, в теории вероятностей и в теории равномерного распределения.

Для базисных функций Хаара существуют высокоэффективные вычислительные алгоритмы. Например, быстрое преобразование Хаара хорошо зарекомендовало себя в практических задачах обработки дискретных сигналов, так как отличительная особенность преобразования заключается в том, что оно является разделимым и легко вычисляется. Быстрые преобразования позволяют значительно сократить количество арифметических операций, а, значит, и время выполнения преобразований.

Функции Хаара непосредственно связаны со многими ортогональными функциями. Одной из самых важных является система функций Фабера-Шаудера, которая состоит из непрерывных кусочно-линейных функций. Система является одним из самых простых базисов на $(0, 1)$.

Цель бакалаврской работы заключается в построении алгоритма быстрого преобразования Хаара и разложения Фабера-Шаудера для функции $f(x) = sinx$. Для достижения цели была изучена теория, касающаяся данных систем.

[1] Соболь И.М., Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1984. 13-20 с

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

В первом разделе сформулированы вспомогательные определения и теоремы. Здесь же доказано, что всякий ортонормированный базис в $C(0,1)$ является базисом в $L^p(0,1), 1 \leq p < \infty$.

Во втором разделе было проведено исследование системы Хаара, которая является базисом в пространстве $L^p(0,1), 1 \leq p < \infty$. Для данной системы был приведен алгоритм быстрого преобразования.

В третьем разделе вводится система Фабера-Шаудера, которая является нормированным базисом в $C(0,1)$.

В четвертом разделе содержится постановка и решение задачи разложения функции по системам Хаара и Фабера-Шаудера.

В приложении приводится код программы, написанный согласно четвертому разделу.

Основное содержание работы. В первом разделе содержатся вспомогательные определения и теоремы.

Определение 1.1. *Система элементов $\{x_n\}$ банахова пространства X называется базисом, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ a_n = a_n(x) \in R^1,\ n = 1, 2...,$$

сходящийся к x по норме пространства X.

Определение 1.2. *Если нам дана функция $f(x) \in C(0,1)$, то функция $\omega(\delta, f) = \sup\limits_{0<h\leq\delta,\ x,y\in[0,1]} |f(x) - f(y)|$, где $0 \leq \delta \leq 1$, называется модулем непрерывности f .*

Если $f(x) \in L^p(0,1), 1 \leq p \leq \infty$, то функция $\omega_p(\delta, f) = \sup\limits_{0\leq h\leq\delta} \Big\{ \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \Big\}^{\frac{1}{p}}, \Big\}, 0 \leq \delta \leq 1$, называется интегральным модулем непрерывности.

В нормированном линейном пространстве $C(0,1)$, которое состоит из непрерывных на (0,1) функций, норму введем следующим образом: $||f||_C = \sup\limits_{x\in(a,b)} |f(x)|$.

Сформулируем вспомогательную теорему:

Теорема 1.1. *Для того, чтобы ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(0,1)$, полная в $C(0,1)$ была базисом в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы функции Лебега системы Φ*

были равномерно ограничены:

$$\|L_N(t)\|_C \leq M < \infty, N = 1, 2, ...$$

Далее приведем теорему о базисах в различных пространствах.

Теорема 1.2. *Если ортонормированная система функций* $\Phi = \{\varphi(x)\}_{n=1}^{\infty}$*– базис в* $C(0,1)$*, то* $\Phi = \{\varphi(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом также в* $L^p(0,1)$*, при* $1 \leq p < \infty$*.*

Во втором разделе рассматривается система Хаара, описываются ее основные свойства. Также приводится описание быстрого дискретного преобразования Хаара.

Введем стандартные обозначения двоичных интервалов, которые будут использоваться в дальнейшем на протяжении всего текста.

Двоичными мы будем называть такие интервалы, которые могут быть получены делением интервала $(0,1)$ на k равных частей. Для двоичных интервалов введем следующее обозначение: $\left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right)$, где $i = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1...$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, ..., 2^k, k = 0, 1...$ введем обозначения [2]:

$$\begin{cases} \Delta_n = \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right); \overline{\Delta_n} = \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right] \\ \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \overline{\Delta_1} = [0,1]. \end{cases}$$

Определение 2.1. *Система Хаара - это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in [0,1],$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$*, а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2^k < n \leq 2^{k+1}, k = 0, 1...$*, определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Данная система является полной и ортонормированной.

Выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье-Хаара функции

[2]Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 69-75 с

$f \in L^1(0,1)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f,x)$ - коэффициенты Фурье-Хаара по определению функций Хаара.

$$\begin{cases} c_1(f) = \int_0^1 f(x)dx; \\ c_n(f) = 2^{\frac{k}{2}}\Big[\int_{\Delta_n^+} f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)dx\Big], n = 2,3... \end{cases}$$

Рассмотрим оценки, относящиеся к поведению коэффициентов Фурье по системе Хаара некоторых классов функций.

Теорема 2.1. *Если функция* $f(x)$ *- измеримая на интервале* $(0,1)$*, то справедливы неравенства* [3]*:*

$$|c_n(f)| \le (2n)^{-\frac{1}{2}}\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big), \quad n > 1,$$

если $f \in C(0,1)$*;*

$$|c_n(f)| \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\omega_p\Big(\frac{1}{n}, f\Big), \quad n > 1,$$

если $f \in L^p(0,1), 1 \le p < \infty$*, где* $\omega(\delta, f)$ *и* $\omega_p(\delta, f)$ *- модули непрерывности функции* $f(x)$ *в пространствах* C *и* L^p*.*

Следующая терема показывает, что любая непрерывная функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся к $f(x)$ ряд Фурье по данной системе.

Теорема 2.2. *Для произвольной функции* $f(x) \in (0,1)$ *её ряд Фурье-Хаара сходится равномерно к* $f(x)$ *равномерно на* $[0,1]$*. При этом*

$$\rho_C(f,N) := ||f - S_N(f)||_C \le 3\omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big), N \ge 1$$

Основной результат данного раздела сформулируем в виде теоремы:

Теорема 2.3. *Система Хаара - базис в пространстве* $L^p(0,1), 1 \le p < \infty$*. При этом*

$$\rho_p(f,N) := ||f - S_N(f)||_p \le C_p\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big),$$

где $N = 1,2,..., C_p = 4^{\frac{1}{p}}(1+2^p)^{\frac{1}{p}}$*. .*

[3] Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 69-75 с

Рассмотрим **быстрое дискретное преобразование Хаара**, которое основано на способе доказательства замкнутости системы в пространстве ступенчатых функций.

Это дискретное преобразование строится на преобразовании последовательности $(c_n)_{n=0}^{2^k-1}$ по базису $\chi_n(x)$.

Любая ступенчатая функция может быть представлена как полином по системе Хаара [4]:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} c_n \chi_n(x) \tag{1}$$

Перепишем (1) в виде:

$$f^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x) + r_{k-1}(x) g^{(k-1)}(x), \text{ где}$$

$g^{k-1}(x)-$ двоично-ступенчатая функция, значение которой равно $c(N)$, $N = 2^k + 1$ на Δ_i^{k-1}.

Запишем это равенство на полуинтервале $\Delta_i^{(k-1)} = \Delta_{2i}^{(k)} \bigcup \Delta_{2i+1}^{(k)}$.

Получаем систему

$$\begin{cases} f_{2i}^{(k)} = f_i^{(k-1)} + g_i^{(k-1)} \\ f_{2i+1}^{(k)} = f_i^{(k-1)} - g_i^{(k-1)} \end{cases}$$

Решая данную систему для $i = 0, 1, 2...2^{k-1} - 1$, находим

$$\begin{cases} f_i^{(k-1)} = \frac{1}{2}(f_{2i}^{(k)} + f_i^{(k)}) \\ g_i^{(k-1)} = \frac{1}{2}(f_{2i}^{(k)} - f_{2i+1}^{(k)}), \end{cases} \tag{2}$$

Мы получили новый вектор $(f_i)_{i=0}^{2k-1}$, в котором последние компоненты равны $f_N = c(N)$, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2^{k-1}}$ есть значения функции $f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n \chi_n(x)$ кусочно-постоянной на интервалах ранга $(k-1)$, причем коэффициенты Фурье-Хаара функции $f^{(k-1)}$ есть первые 2^{k-1} коэффициентов исходной функции $f^{(k)}$.

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n \chi_n(x)$, эти же преобразования получим вектор, в котором последние $2^{(k-2)}$ компонент есть компоненты вектора $c(i)$, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2^{k-2}}$ есть значения функции $f^{(k-2)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-2}-1} c_n \chi_n(x)$ кусочно-постоянной на интервалах ранга $(k-1)$,

[4]Лукомский С.Ф., Быстрые дискретные преобразования Фурье по классическим ортогональным системам. Саратов.: Уч.издание, 2013. 4-7 с.

причем коэффициенты Фурье-Хаара функции $f^{(k-2)}$ есть первые 2^{k-2} коэффициентов исходной функции $f^{(k)}$.

Продолжая последовательное применение формул , получим после $k-$го шага последовательность, которая полностью совпадает с $c(i)$.

Интегрируя систему Хаара, можно определить систему Фабера-Шаудера. Этой системе посвящен **третий раздел.**

Определение 3.1. *Системой Фабера-Шаудера называется система функций*

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad x \in [0,1],$$

и при этом $n = 2^k + i, \quad k = 0, 1, ..., \quad i = 1, 2, ..., 2^k.$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ 1, \quad \textit{если} \quad x = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}} \\ \textit{линейна и непрерывна} \\ \textit{на} \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \textit{ и на } \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}.\right] \end{cases}$$

Функции Фабера-Шаудера выражаются через функции Хаара следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \chi_1(x)dt, \quad \varphi_n(x) = 2||\chi_n||_\infty \int_0^x \chi_n(t)dt, n = 2, 3....$$

Запишем $S_N(x)$ - частную сумму ряда по системе Фабера-Шаудера :

$$S_N(f,x) = \sum_{n=0}^{N} A_n(f)\varphi_n(x),$$

в которой коэффициенты A_n однозначно определяются функцией $f(x)$,

$$A_0 = A_0(f) = f(0), A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0),$$

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\Big(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\Big) - \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{i-1}{2^k}\Big) + f\Big(\frac{i}{2^k}\Big)\Big], \qquad (3)$$

Для функций Фабера-Шаудера была доказана теорема о том, что в пространстве C(0,1) есть базис из кусочно-линейных функций - так называемый

базис Фабера-Шаудера.
Теорема 3.1. *Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве* $C(0,1)$ [5]. *При этом коэффициенты разложения*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x),\ f \in C(0,1),$$

определяются формулами (3), *если* $n = 2^k + i, k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ..., 2^k$, *а частные суммы* $S_N(f,x)$ *этого разложения принадлежат* L_N *и удовлетворяют соотношению*

$$S_N(f,x) = f(x) \text{ при } x \in \pi_n,\ N = 1, 2, ...$$

В виде следствия из теоремы, сформулированы следующие оценки для коэффициентов:
Следствие 3.1. *Пусть* $f \in C(0,1)$. *Имеет место оценки*

а) $|A_n(f) \leq \omega^{(2)}\Big(\frac{1}{N}, f\Big), n = 1, 2, ...,$ *где*

$$\omega^{(2)}(\delta, f) := \sup_{0<h\leq\delta,\ h\leq x\leq 1-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|;$$

б) $\|f - S_N(f)\|_C \leq \omega^{(2)}\Big(\frac{1}{N}, f\Big).$

В четвертом разделе была рассмотрена задача построения алгоритма быстрого преобразования Хаара и разложения Фабера-Шаудера для функции $f(x) = sinx$.

Разобьем отрезок $[0,1]$ на 16 точек. В качестве точного решения будем рассматривать функцию $sinx$.
Во втором и третьем разделе мы ввели $S_N(x)$ - частную сумму ряда по системе Хаара и по системе Фабера-Шаудера.
Данные выражения являются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов $c_n(f)$ и $A_n(f)$ соответственно. Для системы Хаара СЛАУ будем решать с помощью быстрого дискретного преобразования, а для системы Фабера-Шаудера применим формулы (3). После нахождения коэффициентов, сортируем их в порядке возрастания и наименьшие по модулю - зануляем. (В данном эксперименте обнулили 60 процентов коэффициентов).

[5]Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 204-209 с

Задача, поставленная в четвертом разделе, была решена с помощью программы, написанной на языке Java. Исходный код программы приведен в **приложении.**

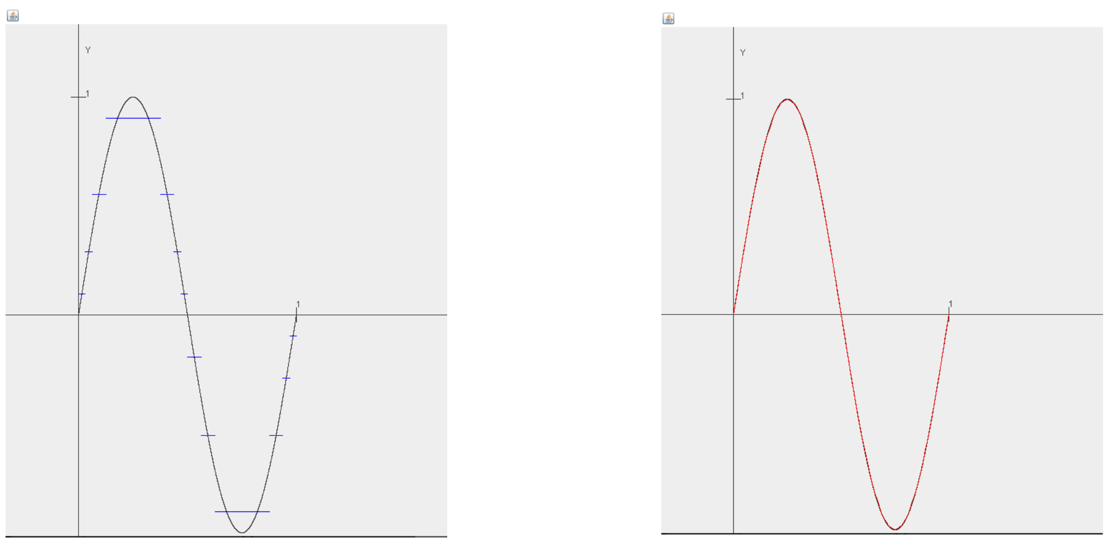
На основе вычислительного эксперимента построим графики соответствующих функций.

Сравним два этих разложения при N=5. Как говорилось ранее, обнуляем 60 процентов коэффициентов.

а) приближенное решение в виде системы Хаара

б) приближенное решение в виде системы Фабера-Шаудера

Рис. 1: Сравнение систем при N=5.



а) приближенное решение в виде системы Хаара

б) приближенное решение в виде системы Фабера-Шаудера

Рис. 2: Сравнение систем при N=5 с обнулением коэффициентов.

На рисунке 1 представлены графики, которые построены без обнуления коэффициентов, а на рисунке 2 с обнулением.

Получаем погрешности для приближенного решения в виде полинома по системе Хаара и по системе Фабера-Шаудера соответственно:

1)Без обнуления коффициентов:

Err(H+)=0.09801714032956084 и Err(FSH+)=0.0012030930634115977;

2)С обнулением:

Err(H-)=0.19465741384232704 и Err(FSH-)=0.004792098914197629.

Из графиков видно, что система Фабера-Шаудера приближает функцию лучше, чем система Хаара.

Сравнивая значения полученных погрешностей, можно сделать вывод о том, что при обнулении коэффициентов график приближенного решения становится хуже. Погрешность увеличивается за счет того, что мы зануляем незначительные коэффициенты преобразования.

Погрешность для приближенного решения в виде полинома по системе Хаара гораздо выше, чем у того же приближенного решения, но в виде полинома по системе Фабера-Шаудера.

Таким образом, разложение функции $f(x) = sin 2\pi x$ по системе Фабера-Шаудера является более точным, чем разложение этой же функции по системе Хаара.

Заключение. В работе были даны основные определения, касающиеся систем Хаара и Фабера-Шаудера. Доказаны теоремы о базисности данных систем и теоремы о сходимостях рядов Фурье-Хаара в различных пространствах, описан алгоритм быстрого преобразования Хаара. Для данных систем была написана программа на языке Java.