Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

Гармонические волны в ортотропной пластине

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Швечихиной Виктории Андреевны

Научный руководитель доцент, к.ф.-м.н. должность, уч. степень, уч. звание	27.06.2017 подпись, дата	Я. А. Парфенова инициалы, фамилия
Зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	Л. Ю. Коссович инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

История исследований, посвященных изучению процессов распространения гармонических волн насчитывается уже более 150 лет. За это время появилось огромное число публикаций, в которых всесторонне исследованы гармонические волны в различных волноводах [1]. Подобные задачи до сих пор вызывают интерес исследователей всего мира.

С гармоническими колебаниями и волнами мы сталкиваемся на каждом шагу. В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов. Представление о них имеется у каждого человека, наблюдавшего движение маятника или волны, бегущей на поверхности воды.

Актуальность данной темы заключается в том, что в настоящее время волновые процессы интенсивно изучаются в различных областях науки.

Их изучение составляет предмет общей теории колебаний и волн, получившей в настоящее время широкое развитие. Знание закономерностей распространения волн в пластинах является основой для анализа и систематизации данных, относящихся к практически используемым конструкциям.

Так же исследование волновых и колебательных движений в сплошной среде и телах не теряет своей актуальности со временем, привлекая внимание большого количества отечественных и зарубежных авторов. Во многих явлениях наблюдаются процессы, которые описываются волновым уравнением, их исследование необходимо для решения множества различных задач.

Общая характеристика работы. Выпускная квалификационная работа выполнена на тему «Гармонические волны в ортотропной пластине».

Объектом исследования является пластина толщиной 2h, выполненная из ортотропного материала. Пластина тонкая, лицевые плоскости свободны от напряжений.

Целью работы является получение дисперсионного уравнения для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси x_1 и проанализировать его численно и асимптотически.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов и заключения, в котором содержится 20 источников. Общий объем работы составляет 42 страницы.

Раздел 1. Постановка задачи о распространении гармонических волн в упругой ортотропной пластине.

Раздел 2. Вывод дисперсионного уравнения

Раздел 3.Численный анализ дисперсионных уравнений

Раздел 4. Асимптотический анализ корней дисперсионного уравнения для антисимметричных волн

Основное содержание работы

Во введении обосновывается важность задачи исследования гармонических волн в ортотропной пластине; описывается существующая необходимость в исследовании поведения ортотропных материалов. Так же обоснована актуальность темы выпускной квалификационной работы в настоящее время, ее цели, и проведены некоторые исторические моменты развития гармонических волн в науке и технике.

В первой главе рассматривается распространение волн в бесконечной отротропной пластине толщиной 2h. Лицевые поверхности данной пластины свободны от нагрузки. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Считается, что координатные оси совпадают с главными осями ортотропии материала. Начало координат находится на срединной плоскости, $|x_3| \leq h$, $|x_1| \leq \infty, |x_2| \leq \infty$.

Приводятся уравнения движения в напряжениях[2,3]:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, i = \overline{1,3} \tag{1}$$

,где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, u_i – компоненты вектора перемещений, ρ – плотность материала, t – время.

Свойства ортотропной пластины будут описываться с помощью обобщенного закона Гука[3]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E_1}\sigma_{11} - \dfrac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \dfrac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \dfrac{1}{E_2}\sigma_{22} - \dfrac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \dfrac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22} + \dfrac{1}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{G_{13}}\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{G_{23}}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{G_{12}}\sigma_{12}. \end{cases} \tag{2}$$

E_i, G_{ij}, ν_{ij} – технические постоянные, ε_{ij}- компонент тензора деформаций.

Тензор деформации определяется через компоненты вектора перемещений соотношениями Коши [4,5] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), i = \overline{1,3} \tag{3}$$

Лицевые плоскости пластины свободны от напряжений и граничные условия имеют вид :

$$\sigma_{i3} = 0, i = \overline{1,3}, \text{при } x_3 = \pm h \tag{4}$$

В начальный момент времени пластина находится в состоянии покоя

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, i = \overline{1,3} \text{ при } t = 0$$

Требуется получить уравнения движения в перемещениях, для этого следует выразить из обобщенного закона Гука напряжения через деформацию.

В полученные соотношения подставить геометрические соотношения, т.е. необходимо выразить напряжения через перемещения. Далее сделаем подстановку полученных соотношений в уравнения движения через напряжения, тем самым уравнения движения через перемещения примут вид:

$$
\begin{gathered}
G_{23}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2}+G_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2{}^2}+G_{13}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3{}^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{E_1}{\widetilde{\Delta}}A_{11}-G_{23}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\frac{E_1}{\widetilde{\Delta}}A_{12}+G_{12}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\right.\\
\left.+\left(\frac{E_1}{\widetilde{\Delta}}A_{13}+G_{13}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
G_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1{}^2}+G_{13}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2{}^2}+G_{23}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3{}^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(\frac{E_2}{\widetilde{\Delta}}A_{21}+G_{12}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\frac{E_2}{\widetilde{\Delta}}A_{22}-G_{13}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\right.\\
\left.+\left(\frac{E_2}{\widetilde{\Delta}}A_{23}+G_{23}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\\
G_{13}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2}+G_{13}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2}+G_{23}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3{}^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\left(\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}}A_{31}+G_{13}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}}A_{32}+G_{23}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\right.\\
\left.+\left(\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}}A_{33}-G_{12}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
\end{gathered}
\tag{5}
$$

, где
$$
\begin{aligned}
&A_{11}=1-\nu_{23}\nu_{32}, && A_{21}=\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}, && A_{31}=\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23},\\
&A_{12}=\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}, && A_{22}=1-\nu_{13}\nu_{31}, && A_{32}=\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13},\\
&A_{13}=\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}, && A_{23}=\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}, && A_{33}=1-\nu_{12}\nu_{21},\\
&\widetilde{\Delta}=A_{11}+A_{22}+A_{33}-2(1+\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13}).
\end{aligned}
$$

Граничные условия примут вид:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33}&=\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}}\left(A_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+A_{32}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\\
\sigma_{23}&=G_{23}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\\
\sigma_{13}&=G_{13}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Во второй главе решения уравнений движения ищем в виде гармонической волны распространяющейся в направлении x_1. Для этого вид решения (7) следует подставить в уравнения движения (5) и граничные условия (7).

$$\begin{cases} u_1 = U \cdot e^{kqx_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_2 = V \cdot e^{kqx_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_3 = W \cdot e^{kqx_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \tag{7}$$

, где k - волновая частота, ω –круговая частота.

После подстановки имеем систему алгебраических уравнений относительно U, W и V:

$$\begin{aligned} & U\left(-k^2 \frac{E_1}{\widetilde{\Delta}} A_{11} + G_{12} k^2 q^2 + \rho\omega^2\right) + ik^2 q\left(\frac{E_1}{\widetilde{\Delta}} A_{13} + G_{13}\right) W = 0 \\ & ik^2 q\left(\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}} A_{31} + G_{13}\right) U + W\left(\frac{E_3}{\widetilde{\Delta}} A_{33} k^2 q^2 - G_{13} k^2 + \rho\omega^2\right) = 0 \\ & V\left(G_{23} k^2 q^2 - G_{12} k^2 + \rho\omega^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Соответствующие граничные условия получаются аналогичным образом и принимают вид:

$$\begin{aligned} & \frac{E_3}{\widetilde{\Delta}}\left(A_{31} kU + A_{33} kqW\right) = 0 \\ & G_{13}\left(kqU + ikW\right) = 0 \\ & G_{23}(kqV) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Тогда для определения q биквадратное алгебраическое уравнение имеет вид:

$$q^4 C_3^2 \cdot C_1^2 + \left[\left(v^2 - C_5^2\right)C_1^2 + \left(v^2 - C_3^2\right)C_3^2 + \left(C_3^2 + C_4^2\right)^2\right] + \left(v^2 - C_5^2\right)\left(v^2 - C_3^2\right) = 0 \tag{10}$$

$$\text{,где} \quad C_1^2 = \frac{E_3 A_{33}}{\widetilde{\Delta} \cdot \rho}; \; C_3^2 = \frac{G_{13}}{\rho}; \; C_4^2 = \frac{E_1 A_{13}}{\widetilde{\Delta} \cdot \rho}; \; C_5^2 = \frac{E_1 A_{11}}{\widetilde{\Delta} \cdot \rho} \tag{11}$$

Если два решения уравнения (10) обозначить через q_1^2 и q_2^2, то решения для u_1 и u_3 получаются как линейные комбинации четырех решений уравнения (10) в виде:

$$\begin{aligned} & u_1 = \left(\sum_{m=1}^{4} \frac{-iF(q_m)}{q_m} W^{(m)} e^{kq_m x_3}\right) e^{ik(x_1 - vt)} \\ & u_3 = \left(\sum_{m=1}^{4} W^{(m)} e^{kq_m x_3}\right) e^{ik(x_1 - vt)} \end{aligned} \tag{12}$$

,где $F(q)=\dfrac{C_3^{\,2}k^2-\omega^2-C^2k^2q^2}{k^2\left(C_4^{\,2}+C_3^{\,2}\right)}$

Дисперсионное соотношение получается из предположения, что пластина свободна от напряжения на двух поверхностях $x_3=\pm h$. Соответственно, уравнения $(8)_1$ и $(8)_2$ можно использовать в сочетании с $(9)_1$ и $(9)_2$, чтобы получить следующую систему однородных уравнений, с учетом замены (11). Получим две системы относительно $\left(W^{(1)}+W^{(2)}\right)$, $\left(W^{(3)}+W^{(4)}\right)$ и $\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)$, $\left(W^{(3)}-W^{(4)}\right)$:

$$\begin{cases}\left(W^{(1)}+W^{(2)}\right)\left(1-F(q_1)\right)ch(kq_1h)+\left(W^{(3)}+W^{(4)}\right)\left(1-F(q_2)\right)ch(kq_2h)=0\\ \left(W^{(1)}+W^{(2)}\right)\left(C_1^{\,2}q_1+\dfrac{C_4^{\,2}}{q_1}F(q_1)\right)sh(kq_1h)+\left(W^{(3)}+W^{(4)}\right)\left(C_1^{\,2}q_2+\dfrac{C_4^{\,2}}{q_2}F(q_2)\right)sh(kq_2h)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)\left(1-F(q_1)\right)sh(kq_1h)+\left(W^{(3)}-W^{(4)}\right)\left(1-F(q_2)\right)sh(kq_2h)=0\\ \left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)\left(C_1^{\,2}q_1+\dfrac{C_4^{\,2}}{q_1}F(q_1)\right)ch(kq_1h)+\left(W^{(3)}-W^{(4)}\right)\left(C_1^{\,2}q_2+\dfrac{C_4^{\,2}}{q_2}F(q_2)\right)ch(kq_2h)=0\end{cases}$$

Из условия существования нетривиального решения системы получим дисперсионное уравнение для случая антисимметричных волн:

$$\left(1-F(q_1)\right)\left(\frac{C_4^{\,2}}{q_2}F(q_2)+C_1^{\,2}q_2\right)ch(kq_1h)sh(kq_2h)=\left(1-F(q_2)\right)\left(\frac{C_4^{\,2}}{q_1}F(q_1)+C_1^{\,2}q_1\right)sh(kq_1h)sh(kq_2h)$$

$$\left(1-F(q_1)\right)\left(\frac{C_4^{\,2}}{q_2}F(q_2)+C_1^{\,2}q_2\right)sh(kq_1h)ch(kq_2h)=\left(1-F(q_2)\right)\left(\frac{C_4^{\,2}}{q_1}F(q_1)+C_1^{\,2}q_1\right)ch(kq_1h)sh(kq_2h)$$

Таким образом получены дисперсионные уравнения, где первое связанно с изгибными волнами, а второе уравнение связано с волнами растяжения- сжатия.

В третьей главе были исследованы дисперсионные кривые для антисимметричных волн для материала боропластик (Рисунок 1, Рисунок 2).

На Рисунке 1 показана зависимость фазовой скорости $\widehat{v}$ от волнового числа kh для фундаментальной моды и первых восьми гармоник. На Рисунке 2– зависимость частоты $\widehat{\omega}$ от волнового числа kh для фундаментальной моды и первых восьми гармоник.

Особенностью графика, показывающего зависимость фазовой скорости от волнового числа, является ярко выраженное сглаживание кривых при достижении значения безразмерной скорости равного $\frac{C_5}{C_3} \approx 4{,}36$.

На Рисунке 2 видна мнимая линия, наклон которой составляет $\widehat{\omega} / kh = C_5$.Эта линия возникает вследствие колебания ветвей графика. При достижении этой мнимой линии слева дисперсионные кривые образуют так называемый «эффект плато». Вдоль плато ветви практически параллельны мнимой линии, и их фазовая скорость практически постоянна. После пересечения мнимой линии ветви почти параллельны между собой и имеют наклон равный $\widehat{\omega} / kh = C_3$.

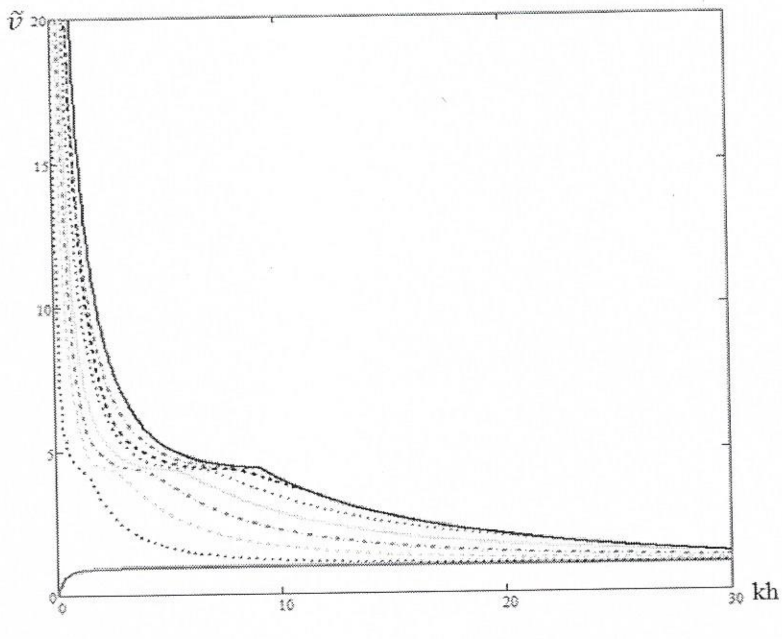

Рисунок 1 - График зависимости фазовой скорости от волнового числа

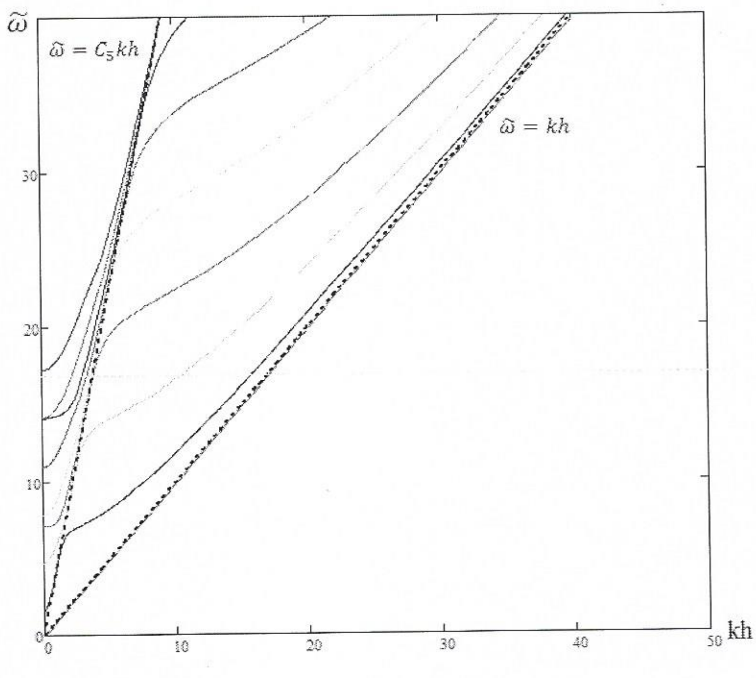

Рисунок 2 - График зависимости частоты от волнового числа

В четвертой главе проводится асимптотический анализ корней дисперсионного уравнения для сильно анизотропных материалов, т.е. материалов для которых выполняется условие: $C_5 \gg \max(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

В данной главе рассматривается область малых и больших волновых чисел. Для каждого из этих случаев были найдены асимптотики. Для области малых волновых чисел было выявлено 2 семейства частот запирания и два асимптотических выражения для скорости.

Асимптотическое соотношение сбалансировано, когда выполняется условие $tg(k\hat{q}_2 h) \sim O(v^2)$ или $tg(k\hat{q}_1 h) \sim O(v^{-2})$.

При рассмотрении первого условия после математических выкладок получаем асимптотическое выражение для скорости в случае, когда $tg(k\hat{q}_2 h) \sim O(v^2)$:

$$v^2 = q_2^{-2} C_3^2 + \left(\frac{\Lambda_1}{kh}\right) - \frac{2A_1 C_3}{A_2 tg(\Lambda_1 C_1^{-1})\Lambda_1} + O\left((kh)^2\right), \tag{13}$$

где $\Lambda_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \cdot C_3$

Из полученного выражения можно получить асимптотику для первого семейства частот запирания:

$\omega_{(1)}^2 = \Lambda_1^2$

Аналогичным способом можно получить асимптотическое выражение для скорости в случае $tg(k\widehat{q}_1 h) \sim O(v^{-2})$:

$$v^2 = q_1^{-2} C_1^2 + \left(\frac{\Lambda_2}{kh}\right) - \frac{2A_1 C_1 tg(\Lambda_2 C_3^{-1})}{A_2 \Lambda_2} + O\left((kh)^2\right), \tag{14}$$

где $\Lambda_2 = \pi n C_1$.

Из данного выражения получена асимптотика для второго семейства частот запирания:

$\omega_{(2)}^2 = \Lambda_2^2$

Сравнение численных результатов с асимптотиками двух семейств частот запирания представлено на Рисунке 3. и Рисунке 4. Сплошной красной линией представлены гармоники, а пунктирной зеленой – асимптотики.

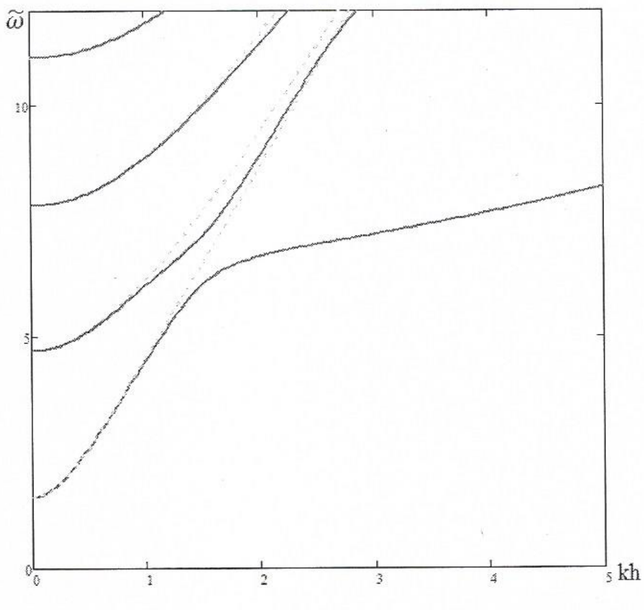

Рисунок 3- Сравнение численного решения для дисперсионных кривых первого семейства частот запирания и асимптотик (13) в области малых волновых чисел

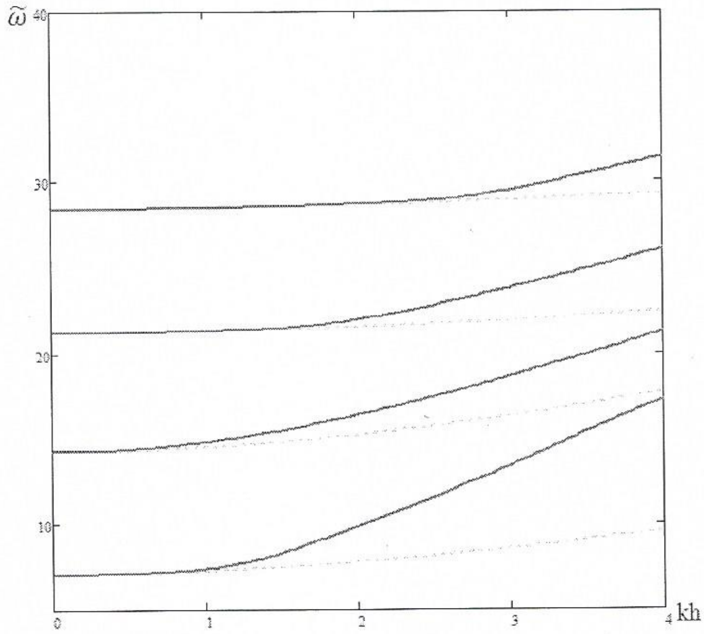

Рисунок 4- Сравнение численного решения для дисперсионных кривых первого семейства частот запирания и асимптотик (14) в области малых волновых чисел

Так же были получены асимптотики в области больших волновых чисел.

$$v^2 = C_3^2 + \left(\frac{C_1^2(C_3^2 - C_5^2) + (C_3^2 + C_4^2)^2}{C_3^2 - C_5^2}\right)\left(\frac{(2n+1)\pi}{2kh}\right)^2\left(1 + \frac{2\widehat{\phi}}{kh}\right) + O(kh)^4 \qquad (15)$$

$$\widehat{\phi} = \frac{2\phi}{(2n+1)\pi}$$

$$\phi = \left(\frac{\widehat{q}_2(C_1^2\widehat{q}_2^2 + C_3^2 + C_4^2)\big(C_3^2C_2^2(C_3^2 - C_5^2\big) + C_4^2(C_1^2(C_3^2 - C_5^2) + \big(C_3^2 + C_4^2\big)^2}{C_1^2C_3^2(C_3^2 + C_4^2)(C_3^2 - C_5^2)\widehat{q}_2^2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Сравнение численных результатов с асимптотиками представлено на графике, где красной сплошной обозначены гармоники, а пунктиром-асимптотики.

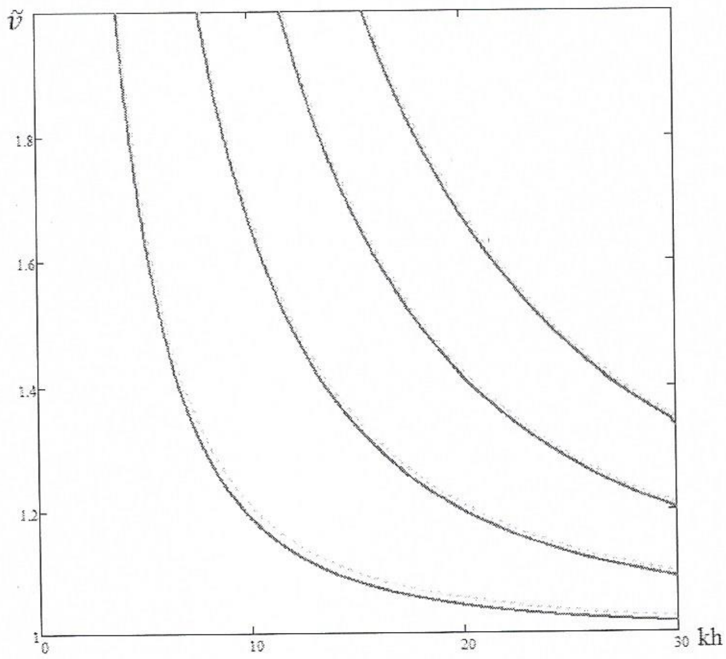

Рисунок 5- Сравнение численного решения для дисперсионных кривых и асимптотик (15) в области больших волновых чисел

Для фундаментальной моды оба корня q_1 и q_2 являются либо действительными, либо комплексно сопряженными. Для малых волновых чисел $kh \to 0$, предел фазовой скорости фундаментальной предел равен нулю. Для больших волновых чисел $kh \to \infty$, фундаментальная мода имеет предел, который по всей видимости связан со скоростью поверхностной волны Рэлея[6].

Тогда асимптотическое выражение для фазовой скорости фундаментальной моды при $kh \to \infty$ будет иметь вид:

$$\left(v^2 - C_3^2\right)\left(C_1^2(v^2 - C_5^2) + C_4^2\right) - \frac{C_1^2 v^2}{C_3^2}\sqrt{\frac{(C_3^2 - v^2)(C_5^2 - v^2)}{C_1^2}} = 0$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены основные закономерности распространения волн в ортотропной упругой пластине, являющейся идеализированной моделью слоистой композитной пластины. В работе получены дисперсионные уравнения, описывающие распространение плоских гармонических волн в пластине. Для антисимметричных продольных волн построены графики дисперсионных кривых для ортотропного материала. Были найдены два семейства асимптотик в области малых волновых чисел. Численный анализ результатов позволил построить асимптотики дисперсионных уравнений для антисимметричных волн в области больших и малых волновых чисел. Корректность проведенного асимптотического анализа подтверждается сравнением асимптотик с численными результатами.

Список использованных источников

1. Мелешко, В. В. Упругие волноводы: история и современность / Бондаренко А. А. , Довгий С. А. ,Трофимчук А. Н., ван Хейст Г.Я.Ф. Мат. Методы та фіз.-мех. поля. -2008. -51,№2. – С. 86-104.

2. Гринченко, В.Т.Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т.Гриченко, В.В.Мелешко. -Киев: Наук.думка, 1981. 283с.

3. Виноградова, М. Б. Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. М.: Наука. Главная редакция физико- математической литературы, 1979. 382 с.

4. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных пластин: Прочность ,устойчивость и колебание / С. А. Амбарцумян. М.: Наука. 1987. 360 с.

5. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий. М.: Наука. Главная редакция физико- математической литературы. 1977. 415 с.

6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Теория упругости: учебное пособие в 10 т. Т. 7. /Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука . 1987. 248 с

16.06.17