

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Нестационарные продольные волны в вязкоупругом стержне: точное
решение и его асимптотики**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Григоряна Гектора Оганнесовича

Научный руководитель
доцент кафедры МТУ и БМ,
к.ф.-м.н., доцент

25.05.2017г. Аноф

дата, подпись

Н.С.Анофрикова

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н, профессор

Л.Ю. Коссович

дата, подпись

Л.Ю. Коссович

Саратов 2017

Введение

Нестационарные процессы, сопровождающиеся распространением волн в различных телах, являются сложными волновыми процессами, часто встречающимися во многих областях техники, в том числе в авиационной и ракетной.

Большое количество материалов, используемых в строительстве и технике, обладает вязкоупругими свойствами. Поэтому проблемы теории вязкоупругости привлекают особое внимание многих исследователей и инженеров в связи с использованием полимерных материалов и пластмасс в различных отраслях производства и строительной индустрии.

Задачи о распространении волн в стержнях в одномерной постановке представляют большой интерес в связи с тем, что стержни являются основным видом образцов, используемых в экспериментальных исследованиях свойств материалов при высоких скоростях нагружения. Кроме того, одномерная задача является наиболее простой и ее можно в значительной мере исследовать как численными, так и аналитическими методами, что позволяет ясно представить особенности задач распространения волн в вязкоупругой среде и апробировать различные методы, которые в дальнейшем будут распространены на неодномерные задачи.

Целью бакалаврской работы является отработка методов исследования процесса распространения нестационарной одномерной продольной волны в тонком полубесконечном вязкоупругом стержне при ударном воздействии на его торец.

Задачами выполняемой работы являются:

1) постановка задачи о распространении нестационарной продольной волны в тонком полубесконечном вязкоупругом стержне при ударном продольном воздействии на его торец. Вязкоупругие свойства материала стержня описываются с помощью определяющих соотношений, взятых в интегрально-операторной;

2) построение точного решения поставленной задачи с помощью метода интегрального преобразования Лапласа по времени [7]. Нахождение оригинала с помощью метода контурного интегрирования;

3) анализ точного решения с целью выделения областей применимости различных приближенных теорий, а также влияния параметров вязкоупругости на поведение решения;

4) построение асимптотики решения в окрестности фронта волны, распространяющейся с длительной скоростью;

5) построение асимптотики решения в окрестности фронта волны, распространяющейся с мгновенной скоростью;

6) анализ полученных асимптотических решений, определение условий и областей согласования их с точным решением.

Структура и объём работы

Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и содержит 43 страницы. Список использованных источников включает 21 наименование.

Раздел 1. Постановка задачи о распространении нестационарных продольных волн вязкоупругом стержне.

Раздел 2. Точный метод решения задачи.

Раздел 3. Построение асимптотического решения.

Практическая значимость работы состоит в расширении области применимости точных аналитических и асимптотических методов к исследованию нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких вязкоупругих стержней.

Основное содержание работы

Бакалаврская работа посвящена исследованию процесса распространения продольной одномерной волны в вязкоупругом тонком полубесконечном стержне, подверженном ударному воздействию, с помощью точных и приближенных аналитических методов.

Во введении описывается актуальность поставленной задачи, история исследований в области вязкоупругости [1], в области описания нестационарных волновых процессов в различных тонкостенных конструкциях как вязкоупругих [2], так и упругих, а также дается краткая характеристика работы.

Первый раздел посвящен постановке задачи о распространении нестационарной продольной одномерной волны в полубесконечном стержне в результате приложения к его торцу ударного продольного воздействия.

Вначале приводятся основные понятия и соотношения теории вязкоупругости. Далее записываются уравнение движения, уравнение состояния и соотношение между деформацией и перемещением. Уравнение состояния берется в интегрально-операторной форме. В качестве ядра интегрального оператора выбирается дробно-экспоненциальная функция Работнова [3].

Затем осуществляется переход от системы трех интегро-дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций: напряжения, деформации и перемещения, к одному интегро-дифференциальному уравнению относительно одной неизвестной функции – напряжения.

К полученному уравнению добавляются начальные и граничное условие, соответствующие постановке задачи. Для моделирования ударного воздействия используется единичная функция Хевисайда [4].

Введение безразмерных переменных, параметров материала и искомой функции позволяет записать исходную задачу в более удобном для дальнейших выкладок виде.

Во втором разделе поставленная задача решается с помощью метода интегрального преобразования Лапласа по переменной времени. Применение данного метода позволяет перейти от интегро-дифференциального уравнения к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. При нахождении изображения слагаемого,

содержащего интеграл, используется понятие свертки двух функций и теорема о свертке.

Решение полученного уравнения представляет линейную комбинацию экспоненциальных функций, отличающихся знаком показателя экспоненты и содержит две постоянные. Поскольку рассматривается процесс распространения волн в направлении возрастания продольной координаты, то константа при слагаемом с положительным показателем степени экспоненты полагается равной нулю. Вторая произвольная постоянная определяется из граничного условия, предварительно записанного в изображениях.

Для обращения изображения напряжения используется формула Меллина [5]. Далее для вычисления полученного интеграла используется метод контурного интегрирования.

Построенные графики приведенных значений напряжения относительно безразмерной продольной координаты для различных значений времени, параметром материала позволяют выявить влияние вязкоупругих характеристик на поведение решения. Анализ точного решения позволяет выделить в решениях четыре зоны, в каждой из которых решение может быть получено с помощью соответствующего асимптотического метода.

В работе также приводится построение асимптотик решения в окрестности фронта волны с мгновенной и длительной скоростью. Приводятся графики сравнения точного решения и его асимптотик, позволяющие выявить условия их применения.

Результаты проведенных численных исследований согласуются с описанием процесса распространения волн в вязкоупругом стержне, подверженном ударному воздействию на его торец, приведенном в [6]. Согласно данному описанию, сначала идет упругая волна с мгновенной скоростью, определяемой значением упругого модуля. За фронтом волны с мгновенной скоростью напряжение быстро затухает. По мере приближения к фронту волны, распространяющейся с длительной скоростью, значение напряжения возрастает до величины, равной приложенной нагрузке на торце.

За фронтом волны, распространяющейся с длительной скоростью, значение напряжения остается постоянным равным приложенной нагрузке на торце.

При применении метода интегрального преобразования Лапласа обращение изображения часто является нетривиальной задачей.

В случае более сложных соотношений между напряжениями и деформациями порой приводит к сложной процедуре контурного интегрирования, которая часто бывает непрактичной из-за больших математических трудностей.

В связи с этим, удобным является построение приближенных решений, основанных на малости каких-либо параметров задачи. Такие решения описывают поведение точного решения исходной задачи в отдельных областях изменения данных параметров.

Области применимости указанных приближенных решений лучше всего исследовать на тестовых задачах, для которых возможно построение точного решения, как в исследуемом случае. Затем результаты можно расширять на задачи, не имеющие точного решения.

В нашем случае, поскольку точное решение уже получено, имеется возможность выявления областей применимости различных асимптотических решений.

Численный анализ точного решения, проведенный в первом разделе бакалаврской работы, с учетом описания процесса распространения волн в вязкоупругих стержнях, приведенного в [6], позволяет выделить в полном решении четыре области применимости различных асимптотических решений: 1 – область квазиупругого решения, 2 – область погранслоя в окрестности фронта волны, распространяющейся с длительной скоростью, 3 – малоамплитудная область, 4 – область погранслоя в окрестности фронта волны, распространяющейся с мгновенной скоростью.

В области 1 решение носит квазиупругий характер и может быть получено как решение упругой задачи, согласованной с данной вязкоупругой задачей.

Область 3 в силу малоамплитудности поведения решения не представляет практического интереса.

Получению приближенных решений в областях 2 и 4 посвящен третий раздел бакалаврской работы.

В области 2 асимптотика решения может получена путем разложения изображения точного решения для напряжения в ряд по положительным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа и последующего обращения членов ряда с помощью метода контурного интегрирования. Обращение также, как и в случае построения точного решения проведено с помощью формулы Меллина и последующего применения метода контурного интегрирования. Следует отметить, что полученная асимптотика, в отличие от изображения точного решения, имеет более простую структуру, а, следовательно, применение метода контурного интегрирования не вызывает трудностей.

В области 4 асимптотика решения может получена с помощью разложения изображения точного решения в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа и последующего обращения членов ряда с помощью таблиц интегральных преобразований.

Построенные графики приведенных значений напряжения по точной и приближенным формулам для различных значений времени позволяют определить области применимости полученных приближенных решений.

Заключение. В бакалаврской работе был исследован процесс распространения продольной волны в вязкоупругом стержне с помощью точного и приближенных аналитических методов.

Рассмотрен тонкий полубесконечный стержень, вязкоупругие свойства которого описываются с помощью определяющих соотношений, взятых в интегрально-операторной форме. В качестве ядра интегрального оператора

выбрано дробно-экспоненциальное ядро Работнова. Предполагалось, что в начальный момент времени к торцу стержня было приложено ударное воздействие. Поставлена соответствующая начально-краевая задача.

Рассмотрены два пути решения этой задачи, в результате которых были получены как точное решение исходной задачи, так и его асимптотики.

Результаты проведенных численных исследований на основе точного решения согласуются с описанием процесса распространения волн в вязкоупругом стержне, подверженном ударному воздействию на его торец, приведенном в работах других авторов.

Были получены асимптотики решения, описывающие его в окрестности квазифронта или фронта волны с длительной скоростью и в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью.

Для нахождения асимптотического решения в окрестности фронта волны, распространяющейся с длительной скоростью, изображение точного решения было разложено в ряд по положительным степеням параметра s . В разложении были оставлены три первых члена. Обращение изображения в случае построения асимптотики, описывающей решение в окрестности фронта волны, распространяющейся с мгновенной скоростью, решение раскладывалось в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования. В показателе степени экспоненты были оставлены слагаемые, содержащие неотрицательные степени параметра интегрального преобразования. Обращение проводилось с помощью таблиц интегральных преобразований Лапласа и теоремы о сдвиге.

Следует отметить, что полученная асимптотика, в отличие от изображения точного решения, имеет более простую структуру, а, следовательно, применение метода контурного интегрирования не вызывает трудностей.

Проведенный сравнительный анализ графиков, построенных для точного решения и его асимптотик позволил сделать выводы о влиянии

вязкоупругих параметров на поведение решения, определить области применимости полученных приближенных решений.

Список используемых источников.

1. Блитштейн, Ю.М. Распространение волн в вязкоупругих средах / Ю.М. Блитштейн, С.И. Мешков // Кишинев: Штиинца, 1977. 205 с.
2. Петрашень, Г. И. Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановки задач и рациональные методы их решения. [Электронный ресурс] / Г. И. Петрашень, Б. М. Каштан, Ю. В. Киселев // Общероссийский математический портал Math-Net.RU [Электронный ресурс] URL: <http://www.mathnet.ru/links/5d67f7371651e884bbed3591552666a/zns15916>.
3. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. // Москва: Наука, 1977. 383 с.
4. Функция Хевисайда [Электронный ресурс]: Википедия – свободная энциклопедия. / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001 – . URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Хевисайда (дата обращения: 04.03.2016). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 13:49, 30 ноября 2014. Яз. рус.
5. Формула Меллина [Электронный ресурс]: Википедия – свободная энциклопедия / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001- . URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Меллина.
6. Демидова, И.И.. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций / И.И. Демидова, В.С. Екельчик // Исследования по упругости и пластичности. Л. 1978. № 12. С.107-113.
7. Преобразование Лапласа [Электронный ресурс]: Википедия – свободная энциклопедия. Электрон. дан. / текст доступен по лицензии Creative Commons

Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1312526 статей). Wikipedia®, 2001- . URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Лапласа (дата обращения: 06.04.2017). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 18:44, 30 апреля 2016. Яз. рус.

A handwritten signature in blue ink, consisting of several overlapping, stylized loops and lines, positioned in the upper right quadrant of the page.