Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

Влияние ребра жесткости, не имеющего общих точек с краями, на прогибы и изгибающие моменты пластинки под действием сосредоточенной силы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Вавакина Анатолия Владимировича

Научный руководитель д.т.н., профессор ____ подпись, дата ____ Белосточный Г.Н.

Зав. Кафедрой д.ф.-м.н., профессор ____ подпись, дата ____ Коссович Л.Ю.

Саратов 2017

Введение

Рассматривается выпускная квалификационная работа, выполненная на тему «Влияние ребра жесткости, не имеющего общих точек с краями, на прогибы и изгибающие моменты пластинки под действием сосредоточенной силы».

В строительном деле, машиностроении, гидротехнике, судо- и авиостроении, дорожном деле и других отраслях техники широко используются элементы конструкций в виде ребристых пластин. Пластины обладают рядом статических и технологических достоинств. Благодаря опиранию по всему контуру или по большей его части, пластины отличаются высокой несущей способностью, так как под действием нагрузки изгибаются в двух направлениях, и их сопротивление деформациям используется значительно эффективнее, чем в балках.

При необходимости используются различные по степени точности теории пластин и оболочек:

1) теория тонких оболочек на основе гипотез Лява или Рейсснера
2) теория конструктивно-анизатропных оболочек
3) теория ребристых оболочек
4) теория тонких многослойных оболочек
5) теория сетчатых оболочек
6) теория пологих оболочек и т.д

Основы теории оболочек были заложены еще в XIX веке. Теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа впервые была разработана Г. Ароном в 1884г., но содержала ряд неточностей, которые были устранены А. Лявом в 1888г..

Актуальность работы обусловлена тем, что пластины являются одним из наиболее распространенных монтажных элементов сборных пространственных тонкостенных конструкций широко используемых в инженерной практике. Важным элементом в таких конструкциях является ребро жесткости. Поэтому анализ влияния ребер жесткости на прогибы и изгибающие моменты является необходимым при проектировании конструкций указанного класса.

Целью работы является определение в первом и во втором приближениях функции прогиба и в этих же приближениях изгибающие моменты для пластинки, подкрепленной ребром, не имеющим общих точек с краями, под действием сосредоточенной силы.

Объектом исследования является тонкая пластинка, подкрепленная ребром жесткости, не имеющим общих точек с основанием.

Предметом исследования являются прогибы и изгибающие моменты пластинки, частично подкрепленной ребром, не имеющим общих точек с основанием.

Задачами исследования являются:

- разбор основных положений и гипотез теории ребристых пологих оболочек постоянного кручения
- построение силовой функции упругой системы для пластинки, частично подкрепленной ребром
- получение вариационным путем уравнения равновесия подкрепленной пластинки в компонентах поля перемещения
- определение в первом и во втором приближениях функции прогиба и в этих же приближениях изгибающие моменты для пластинки под действием сосредоточенной силы.
- количественный анализ
- построение трехмерного изображения, наглядно показывающего влияние прогибов и моментов на пластинку

Структура и объем работы: Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованных источников, включающего [ ] наименований. Работа изложена на [ ] листах машинописного текста, содержит [ ] рисунков и 10 таблиц.

Основное содержание работы

Во введение говорится про применение пластин и пластинчатых схем в жизни. Проводится обзор теории пластин и краткой исторической справке о ее создании.

В первой главе рассматриваются основные положения и уравнения теории пологой оболочки двоякой кривизны, частично подкрепленной ребрами жесткости на основе континуальной модели.

Силовая функция упругой системы для оболочки, частично подкрепленной ребром [2,4]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int_{-z^*}^{z^*}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left(e_x\sigma_x + e_y\sigma_y + e_{xy}\tau_{xy}\right)dxdydz, \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$– компоненты тензора напряжений, связанные с деформациями уравнениями состояния;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[e_x + \nu e_y - \alpha(1+\nu)\theta(x,y,z,t)\right],$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[e_y + \nu e_x - \alpha(1+\nu)\theta(x,y,z,t)\right], \tag{2}$$
$$\tau_{xy} = Ge_{xy}\,,$$

e_x, e_y, e_{xy}– компоненты тензора деформаций, которые связаны с компонентами поля перемещений срединной поверхности (u,v,w) равенствами [2,3]:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} - r_0 W - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$
$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} - t_0 W - z\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \tag{3}$$
$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

где r_0, t_0 – главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Закон изменения поля перемещений по толщине оболочки имеет вид:

$$u^z = u + z\frac{\partial W}{\partial x}, \quad v^z = v + z\frac{\partial W}{\partial y}, \quad w^z = W. \tag{4}$$

Вектора положения точек внешней и внутренней поверхности оболочки запишутся в виде [5,6]:

$$\overline{R}^{\pm}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \overline{\mathrm{r}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \pm z^*(x, y)\overline{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}. \tag{5}$$

Где внешнюю поверхность описывает уравнение:

$$z^*(x, y) = \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\varphi(x, x_i)H^*(y, y_j). \tag{6}$$

$\varphi(x, x_i)$ – элемент фундаментальной последовательности, сходящейся к δ –функции и такой, что [1]

$$\begin{cases} \varphi(x, x_i) \ll 1, \text{при } x \geq x_i + \dfrac{a_i}{2} \text{ и } x \leq x_i - \dfrac{a_i}{2}, \\ \varphi(x, x_i) = 1, \text{при } x = x_i\,; \end{cases}$$

$H^*(y, y_j) = H(y - y_j) - H(y - y_{j+1})$ – функция Хевисайда, при изменении толщины оболочки в области $y_j \leq y \leq y_{j+1}$.

Далее подставляем (2) и (3) в (1) и интегрируем по переменной z в указанных пределах. Затем из дифференциального вариационного принципа Лагранжа $\delta\mathcal{L} = 0$ получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение пологих оболочек с быстроизменяющейся толщиной в двух направлениях.

Во второй главе рассматриваются основные уравнения теории тонких ребристых пластин.

Вариационным путем получено уравнение равновесия для функции прогиба:

$$\nabla^2\nabla^2 W + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Phi^3\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Phi^3\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Phi^3\right) = \frac{q_z}{D}, \tag{7}$$

$$где \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

В третье главе определяются функции прогибов и моментов.

В первом разделе третьей главы рассматривается прямоугольная геометрически нерегулярная пластинка, подкрепленная ребром жесткости, не имеющим общих точек с краями. Внешняя поверхность пластинки находится под действием кусочно-постоянной нормальной нагрузки $q = q_0 H(x -$ *x0Hy−y0*

на краях пластины выполняются условия шарнирного опирания [4]

$$\begin{aligned} &при \quad x = 0,\ x = a,\ W = 0,\ M_1 = 0, \\ &при \quad y = 0,\ y = b,\ W = 0,\ M_2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение дифференциального уравнения равновесия для такой пластины

$$\nabla^2\nabla^2 W + \delta^3(x - x_1)\left[H(y - y_1) - H(y - y_2)\right]\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\delta^3(x - x_1)[\delta(y - y_1) -$$

$$-\delta(y-y_2)]\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \delta^3(x - x_1)\left[\frac{d\delta(y-y_1)}{dy} - \frac{d\delta(y-y_2)}{dy}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = {}^{q}/_{D}. \tag{9}$$

$$\delta^3(x - x_1) = a_1(h_1/h)^3\delta(x - x_1).$$

тождественно удовлетворяющее краевым условиям шарнирного опирания всех четырех сторон (8), будем разыскивать в виде двойных тригонометрических рядов с постоянными коэффициентами

$$W(x, y) = \sum_{k,m} W_{km} Sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) Sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \tag{10}$$

где коэффициенты ряда определяются методом Галёркина [6].

Во втором приближении решение дифференциального уравнения равновесия (9) будем разыскивать в виде:

$$W(x, y) = W_{11} Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) Sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + W_{12} Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) Sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right). \tag{10$'$}$$

Во втором разделе третьей главы определяется функция прогиба и моменты во втором приближении.

На основании стандартных процедур метода Галеркина применительно к уравнению (9) получим систему из двух алгебраически неоднородных линейных уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующего ряда (10)'.

Подставляя найденные коэффициенты как решение алгебраической системы W_{11} и W_{12} в формулу (10)', получим функцию прогиба W во втором приближении.

Далее проводится количественные анализ функции прогиба упругой системы «пластинка-ребро». Результаты представлены в таблицах, было рассмотрено пять случаев.

1) $x_0 = \frac{a}{2};\ x = \frac{a}{2};\ y_0 = \frac{b}{2};\ x_1 = \frac{a}{2};\ y_1 = \frac{a}{2};\ y_2 = \frac{3a}{4};\ y = \frac{5a}{8};\ a = b;$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}01$$

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	0,00105
3	0,00099
4	0,00089
5	0,00078

Таблица 1 – значение функции прогиба при условиях 1

2) $x_0 = \frac{a}{2};\ y_0 = \frac{b}{2};\ x_1 = \frac{2a}{3};\ x = \frac{a}{3}\ ;\ y_1 = \frac{a}{3};\ y_2 = \frac{2a}{3};\ y = \frac{a}{2};\ a = b;$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}01$$

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	0,00088
3	0,00085
4	0,00078
5	0,00070

Таблица 2 – значение функции прогиба при условиях 2

3) $x_0 = \frac{a}{2};\ y_0 = \frac{b}{2};\ x_1 = \frac{a}{3};\ x = \frac{a}{3}\ ;\ y_1 = \frac{a}{4};\ y_2 = \frac{3a}{4}; y = \frac{a}{3}; a = b;$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}01$$

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	0,00088
3	0,00083
4	0,00075
5	0,00065

Таблица 3 – значение функции прогиба при условиях 3

4) $x_0 = \frac{a}{2};\ y_0 = \frac{b}{2};\ x_1 = \frac{4a}{5};\ x = \frac{4a}{5}\ ;\ y_1 = \frac{2a}{5};\ y_2 = \frac{4a}{5}; y = \frac{3a}{5}; a = b;$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}01$$

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	0,00063
3	0,00061
4	0,00058
5	0,00054

Таблица 4 – значение функции прогиба при условиях 4

$$5)\ x_0 = \frac{a}{2};\ y_0 = \frac{b}{2};\ x_1 = \frac{5a}{6};\ x = \frac{5a}{6}\ ;\ y_1 = \frac{a}{4};\ y_2 = \frac{3a}{4};\ y = \frac{a}{2};\ a = b;$$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}01$$

$\frac{h_1}{h}$	$W^* = W / \frac{q_0 a^4}{D}$
2	0,00051
3	0,00050
4	0,00049
5	0,00046

Таблица 5 – значение функции прогиба при условиях 5

$\left(\frac{h_1}{h}\right)$- отношения высоты ребра к длине пластины.

Количественный анализ показал, что во всех случаях прогибы в точках убывают с увеличением относительной высоты ребра.

В третьем разделе третьей главы определяются изгибающие моменты во втором приближении, возникающие в геометрически нерегулярной пластине, под действием сосредоточенной силы.

Найденную функцию прогиба W подставили в формулы для моментов

$$M^{11} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),$$

$$M^{22} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right). \qquad (11)$$

Результаты расчетов приведены в таблицах.

$\frac{h_1}{h}$	$M_{11}^{*} = M^{11} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^{*} = M^{22} / \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0144	0.0167
3	0.0135	0.0154
4	0.0120	0.0134
5	0.0103	0.0111

Таблица 6 – значение относительного изгибающего момента при условии 1.

${}^{h_1}/_{h}$	$M_{11}^{*} = M^{11} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^{*} = M^{22} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0113	0.0113
3	0.0109	0.0109
4	0.0101	0.0101
5	0.0090	0.0090

Таблица 7 – значение относительного изгибающего момента при условии 2.

${h_1}/{h}$	$M_{11}^* = M^{11} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0113	0.0113
3	0.0107	0.0107
4	0.0096	0.0096
5	0.0083	0.0083

Таблица 8 – значение относительного изгибающего момента при условии 3.

${h_1}/{h}$	$M_{11}^* = M^{11} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0086	0.0098
3	0.0083	0.0094
4	0.0079	0.0089
5	0.0072	0.0081

Таблица 9 – значение относительного изгибающего момента при условии 4.

${h_1}/{h}$	$M_{11}^* = M^{11} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$	$M_{22}^* = M^{22} \Big/ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{q_0 a^2}{D}$
2	0.0086	0.0066
3	0.0083	0.0065
4	0.0079	0.0062
5	0.0072	0.0059

Таблица 10 – значение относительного изгибающего момента при условии 5.

Количественный анализ показал уменьшение моментов с увеличением относительной высоты ребра.

В четвертой главе приводится построение трехмерного изображения функции прогибов и моментов, иллюстрирующих влияние геометрических параметров пластинки на функцию прогиба и моментов.

Заключение

1. Изучена теория пологих оболочек и пластин, подкрепленных ребрами, не имеющих общих точек с краями.
2. Вариационным путем получено уравнение равновесия геометрически нерегулярной пластины.
3. Методом Галёркина получено аналитическое выражение для функции прогиба в случае геометрически нерегулярной пластины, шарнирно закрепленной по всему контуру, под действием кусочно-постоянной нормальной нагрузки во втором приближении.
4. Проведен количественный анализ влияния геометрических параметров упругой системы по функции прогиба и изгибающим моментам.
5. Построено трехмерное изображение функции прогиба и моментов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антосик, П., Микусинский, Я., Сикорский, Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, М. : Мир, 1976. 311 с.

2. Назаров, А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек / А. А. Назаров. Л. : Стройиздат, 1966. 303 с.

3. Рассудов, В. М., Красюков, В. П., Панкратов, Н. Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек / В. М. Рассудов, В. П. Красюков, Н. Д. Панкратов. С. : Саратовский университет, 1973. 154 с.

4. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. Л. : Судпромгиз, 1962. 431 с.

5. Прикладная механика. Основы теории оболочек: учеб. пособие / П. А. Жилин. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.

6. Канторович, Л. В., Крылов, В. И. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Л. : Физматгиз, 1962. 708 с.

16.06.17