Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра _Геометрии____

__ ______Двойственность Шура-Вейля_________________

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)___2__ курса __227_____группы

направления 02.04.01- _Математика и компьютерные науки_____
код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук__
наименование факультета, института, колледжа

Аль-Тамими Инас Хасан Абед
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
_профессор, д.ф.-м.н., доцент___ _______________ А.Н.Сергеев__
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор_ ________________ В.В. Розен___
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов_2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Двойственность Шура-Вейля появилась в работах ученика Фробениуса И. Шура, как способ изучения конечномерных представлений общей линейной группы методами теории представлений симметрической группы. Более подробно основное утверждение И. Шура гласит, что при естественном действии симметрической и общей линейной группы на тензорной степени тождественного представления они являются взаимными централизаторами друг друга. Как следствие И. Шур получил способ описания неприводимых конечномерных представлений общей линейной группы в терминах диаграмм Юнга. В более простых терминах это означает классификацию тензоров по типу их симметрии. Позднее Г. Вейль существенно улучшил изложение результатов И. Шура.

В дальнейшем оказалось, что метод И. Шура (метод дуальных пар) может быть применен во многих областях математики, включая и недавно появившиеся направления : теория квантовых групп, теория классических групп и алгебр Ли, бесконечномерные алгебры и группы Ли

Цели и задачи работы. Целью работы является изучение классической теория двойственности на простейшем примере симметрической и общей линейной группы, а также улучшение классических методов доказательста с использованием современных достижений.

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 23 наименование. Объем работы составляет 58 страниц. В работе представлены 2 иллюстрации.

Краткая характеристика материалов работы. Работа состоит из четырех глав. В первом глае приведены основные определения и теоремы теории симметрических групп. Приведены примеры таких групп. Рассматривается цикловая структура элементов симметрической группы и понятие сопряженности. В качестве примера рассматриваются группы малого порядка. Изучается понятие представления и модуля Шпехта. Приводятся формулы для размерности неприводимого представления и таблицы характеров групп малых порядков. В главе два изучается общая линейная группа включая линейные группы над конечными полями. Даются минимальные необходимые сведения из теории групп и алгебр Ли. Тензорным произведением векторных пространств посвящена третья глава. Дается определение тензорного произведение векторных пространств и некоторых основных его свойств. В последней главе для доказательства двойственности Шура - Вейля приводятся и обсуждаются ряд лемм и теорем вместе с их доказательствами.

Научная новизна и значимость работы.

Научная новизна работы заключается в том, что приведено технически усовершенствованное доказательство леммы о множестве образующих алгебры инвариантов для симметрической группы.

Научная значимость работы заключается в доступном изложении важного общезначимого математического результата с некоторыми техническими усовершенствованиями.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносится следующее положение.

1. Симметрическая группа и общая линейная алгебра Ли являются взаимными централизаторами друг друга при естественном действии на тензорной степени стандартного представления.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава магистерской работы посвящена симметрическим группам и их представлениям.

Определение 1. Симметрическая группа порядка n, это множество всех взаимно однозначных отображений отображений конечного множества из n элементов.

Определение 2. Представлением симметрической группы называется ее гомоморфизм в группу обратимых линейных операторов конечномерного векторного пространства.

Определение 3. Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L)$, такая что сумма ее членов равна n.

Каждому разбиению λ можно сопоставить модуль Шпехта (индуцированный модуль) M^λ.

Предложение 1. Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, то :

$$dimM^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_2! \dots \lambda_k!}$$

В главе 2 приводятся основные определения и понятия относящиеся к алгебрам Ли.

Определение 1. Алгеброй Ли[1] над полем F называется F-векторное пространство L вместе с билинейным отображением, $[\cdot\,\cdot]: L \times L \to L$, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) $[x, x] = 0, \forall x \in L$

(2) $[x\,[y, z]] + [y, [z, x]] + [[x, y, z] = 0, \forall x, y, z \in L$

[1] У. Фултон, Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии, М.: МЦНМО, 2006.

Скобка $[x, y]$ обычно именуется как коммутатор x и y. Условие (2) в определении известен как тождество Якоби.

Определение 2. Подалгебра алгебры L Ли это подпространство $K \subseteq L$ такое, что

$$[x, y] \in K, \forall x, y \in K.$$

В качестве примера алгебры Ли, рассмотрим $gl(V)$ для конечномерного векторного пространства V, где скобка Ли $x, y \in gl\,(V)$ определяется по правилу,

$$[x, y] = x\, o y - y o\, x$$

Пусть G будет группой матриц. Определим алгебру Ли группы G как,

$$\mathbf{Lie}(G) = \{A \in gl(n): e^{tA} \in G, \forall t \in R\}.$$

Примеры.

(1) Общаq линейнаq группа $GL(n)$:

Если $G = GL(n)$, то

$$\mathbf{Lie}(G) = \{A \in gl(n): e^{tA} \in GL(n), \forall t \in R\} = gl(n),$$

Где последний вывод вытекает из того факта, что e^{A} является обратимой для всех $A \in gl(n)$.

(2) Специальнаq линейнаq группа $SL(n)$: Если $G = SL(n)$, то

$$\mathbf{Lie}(G) = \{A \in gl(n): e^{tA} \in SL(n), \forall t \in R\} = \{A \in gl(n): \det(e^{tA}) = 1, \forall t \in R\} = \{A \in gl(n): e^{t\, trA} = 1, \forall t \in R\} = \{A \in gl(n): tr(A) = 0\} = sl(n).$$

(3) Ортогональная группа $O(n)$: Если $G = O(n)$, то

$$\mathbf{Lie}(G) = \{A \in gl(n): e^{tA} \in O(n), \forall t \in R\} = \{A \in gl(n): (e)^{tA^{T}}(e^{tA}) = I\}.$$

Теперь дифференцируя обе стороны $(e)^{tA^T}(e^{tA}) = I$ по t, получим

$$A^T(e)^{tA^T}(e^{tA}) + (e)^{tA^T}A(e^{tA}) = 0$$

При t = получаем,

$$A^T + A = 0.$$

Таким образом если , $G = O(n),$ то $\mathrm{Lie}(G) = so(n)$.

(4) Специальная ортогональная группа $SO(n)$. Если $G = SO(n)$, то, используя аргументы для (2) и (3) выше, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(G) &= \{A \in gl(n): e^{tA} \in SO(n), \forall t \in R\}\\ &= \{A \in gl(n): A = -A^T, tr(A) = 0\}\\ &= \{A \in gl(n): A = -A^T\}(A = -tr(A) = 0)\\ &= \mathrm{so(n)}\end{aligned}$$

В третьей главе дается определения и приводятся основные свойства тензорного произведения векторных пространств.

Определение 5.[2] Пусть U и V два векторных пространства. Их тензорным произведением называется векторное пространство W, вместе с билинейным отображением $\mathrm{U}\times V \to W$ таким, что образ пары базисов относительно этого отображения является базисом в пространстве W. В этом случае можно показать, что пространство W определено однозначно, с точностью до естественного изоморфизма и оно обозначается как $U \otimes V$.

Аналогично можно определить тензорное произведение нескольких векторных пространств, а также тензорную степень векторного пространства.

Четвертая глава является основной, в ней формулируется и доказывается основная теорема о двойственности Шура-Вейля.

[2] Pavel Etingof , Oleg Gjlberg , Sebastian Hensel , Tiankai Liu , Alex Schwendner , Dmitry Vaintrob , and Elena Yudovina . Introduction to representation theory . arXiv : 0901.0827v5 [math.RT] ,2011.

Пусть V – колостномерное векторное пространство и $GL(v)$ – группа обратимых линейных операторов на пространстве V [23].

Пусть $W_k = \underbrace{V \otimes V \otimes \quad \otimes V}_{k}$ и S_k – группа перестановок из k элементов.

Определение 6. Действием (или модулем) над группой G называется векторное пространство V вместе с отображением $G{\times}V \longrightarrow V$ таким, что:

1) $(g, v) \longrightarrow gv$ – линейно по второму признаку;
2) $g_1(g_2v) = (g_1g_2)v$;
3) $e \cdot v = v, \quad \forall v \in V.$

Лемма 1. Отображение $S_k{\times}W_k \longrightarrow W_k$, определенное по правилу

$$(\sigma, v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

является действием симметрической группы в пространстве W_k.

Доказательство.

1) Линейность.

Выберем базис в пространстве V. Из определения тензорного произведения следует, что существует линейное отображение $L_\sigma \colon W_k \longrightarrow W_k$такое, что

$$L_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

в случае, когда $v_1, \dots, v_k$ – какие-либо базисные векторы.

Рассмотрим теперь две полилинейные формы

$\psi_1(v_1, \dots, v_k) = L_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$ и $\psi_2(v_1, \dots, v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$.

Обе полилинейны, как и их разность $\psi = \psi_1 - \psi_2$. Форма ψ равна нулю когда $v_1, \dots, v_k$ последовательность базисных векторов и потому полидейственно, равна нулю. Таким образом,

$$L_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

для любых вектором $v_1, \dots, v_k$.

2) $\sigma\big(\tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)\big) = \sigma\big(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\tau^{-1}(k)}\big) = v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))} \otimes \dots \otimes v_{\tau^{-1}\left(\sigma^{-1}(k)\right)} = v_{(\tau\sigma)^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{(\tau\sigma)^{-1}(k)} = (\sigma\tau)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$.

3) Очевидно.

Лемма 2. Отображение $GL(v) \times W_k \longrightarrow W_k$, определенное по правилу

$$(A, v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = Av_1 \otimes Av_2 \otimes \dots \otimes Av_k$$

является действием общей линейной группы в W_k.

Доказательство.

1) Линейность.

Выберем базис в пространстве V. Из определения тензорного произведения следует, что существует линейное отображение $L_A: W_k \longrightarrow W_k$такое, что

$$L_A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = Av_1 \otimes Av_2 \otimes \dots \otimes Av_k$$

в случае, когда $v_1, \dots, v_k$ – базисные векторы.

Отсюда, как и прежде, следует, что это равенство верно для всех векторов.

2) $A\big(B(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)\big) = A(Bv_1 \otimes Bv_2 \otimes \dots \otimes Bv_k) = ABv_1 \otimes ABv_2 \otimes \dots \otimes ABv_k = AB(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$.

3) Очевидно.

Теорема 4.

$$\begin{aligned}\sigma A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) &= \sigma(Av_1 \otimes Av_2 \otimes \ldots \otimes Av_k) \\ &= Av_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes Av_{\sigma^{-1}(k)} = A\left(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}\right) \\ &= A\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)\end{aligned}$$

Лемма 3. Отображение $S_k \times End(W_k) \longrightarrow End(W_k)$, определенное по правилу $(\sigma, L) \longrightarrow \sigma L \sigma^{-1}$ определяем действие S_k в $End(W_k)$.

Лемма 4. Отображение

$$\underbrace{End(v) \otimes \ldots \otimes End(v)}_{k} \longrightarrow End(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k})$$ такое, что
$\varphi(A_1 \otimes \ldots \otimes A_k)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = A_1 v_1 \otimes \ldots \otimes A_k v_k$

является изоморфизмом векторных пространств, который коммутируем с действием S_k.

Лемма 5[3]. Пусть A – алгебра, тогда алгебра
$B = \left(A^{\otimes k}\right)^{S_k}$ порождается элементами

$b \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes b \otimes \ldots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes b = \Delta_n(a)$,
$a \in A$. Обозначим $B' =< A_k(a) >$.

Доказательство.
Достаточно показать, что

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_k) \in B'$$

[3] Pavel Etingof , Oleg Gjlberg , Sebastian Hensel , Tiankai Liu , Alex Schwendner , Dmitry Vaintrob , and Elena Yudovina . Introduction to representation theory . arXiv : 0901.0827v5 [math.RT] ,2011.

Индукция по m числу $a_i \neq 1$.

Если $m = 1$, то

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\sigma(a_1\otimes 1\otimes \dots \otimes 1) = \Delta(a_1,\dots,a_k) = \frac{1}{k}\Delta_n(a) \in B'$$

Пусть $m > 1$. По индукции $\Delta(a_1 \dots a_{m-1}, 1 \dots 1) \in B'$.

Рассмотрим произведение

$$\Delta(a_1 \dots a_{m-1}, 1 \dots 1)\cdot\Delta(a_m, 1, \dots, 1) = \mathrm{c}\,\Delta(a_1, \dots, a_m, 1, \dots, 1) + \dots$$

Где многоточие означает линейную комбинация Δ с числом элементов меньших m. Следовательно, $\Delta(a_1, \dots, a_m, 1, \dots, 1) \in B'$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были подробно изучены симметрические группы, общие линейные алгебры Ли, тензорные произведения векторных пространств и простейшие понятия теории представлений. На основе полученных знаний самостоятельно было доказано, что группа симметрическая группа и общая линейная алгебра Ли являются взаимными централизаторами при естественном действии на тензорной степени стандартного представления. В доказательство этого факта внесены технические

усовершенствования. Результаты самостоятельного исследования доложены на студенческой научной конференции «Математика. Механика», секция «Геометрия и алгебра интегрируемых систем».

Результаты работы могут послужить моделью для аналогичного исследования дуальных различных видов и основой лекционного курса для магистров.