Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

наименование кафедры

Последовательность Майера-Вьеториса

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 Группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Танатаровой Асии Кайратовны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

ассистент		Волокитина Е.Ю.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.		Розен В.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. В математике когомологии де Рама - инструмент, принадлежащий как алгебраической топологии, так и дифференциальной топологии, способный выразить основную топологическую информацию о гладких многообразиях. Поскольку когомологии де Рама большинства пространств не могут быть вычислены непосредственно из их определений, используют такой инструмент как последовательность Майера-Вьеториса. Последовательность Майера-Вьеториса является алгебраическим инструментом, помогающим вычислять алгебраические инварианты топологических пространств.

Результат связан с двумя австрийскими математиками Вальтером Майером и Леопольдом Вьеторисом. В. Майер начал изучать топологию, когда посещал лекции Л. Вьеториса в 1926 и 1927 годах в университете в Вене. Ему рассказали о гипотетическом результате и пути его решения, и уже в 1929 году В. Майер решил вопрос о последовательности инвариантов топологического пространства. Он применил свои результаты к тору, рассматриваемому как обьединение двух цилиндров. Л. Вьеторис позже доказал полный результат для групп когомологий в 1930 году, но не выразил его как точную последовательность. Понятие точной последовательности появилось только в книге 1952 года "Основы алгебраической топологии" Самуэля Эйленберга и Нормана Стинрода, где результаты Майера и Вьеториса были выражены в современной форме.

Метод заключается в разбиении пространства на подпространства, для которых когомологии де Рама проще вычисляются или известны. Многие пространства, встречающиеся в топологии, являются обьединением достаточно простых множеств. Тщательный выбор двух таких множеств, имеющих более простые когомологии, чем когомологии всего пространства, может позволить полностью вычислить когомологии пространства.

Тот факт, что когомологии де Рама являются инвариантами многообразий, определяет данное исследование как актуальное.

Целью данной работы является изучение естественной длинной точной последовательности, элементами которой являются когомологии де Рама всего пространства, прямая сумма когомологий подпространств и когомологии пересечения подпространств.

Для достижения цели были определены следующие задачи:

- познакомиться с важным топологическим инвариантом гладких многообразий - когомологиями де Рама;
- изучить математический аппарат точных последовательностей, служащий для вычисления когомологий дифференциальных комплексов, в частности, последовательность Майера-Вьеториса;
- доказать гомотопическую инвариантность когомологий де Рама, из которой следует то, что когомологии де Рама являются топологическим инвариантом;
- научиться применять последовательность Майера-Вьеториса и гомотопическую инвариантность для вычисления когомологий де Рама конкретных многообразий.

Работа состоит из введения; основной части, которая в свою очередь состоит из 4 разделов, некоторые из них имеют разделения на пункты; заключения; списка используемых источников, состоящего из 20 наименований; приложения.

В первом разделе излагаются основы теории когомологий де Рама. В нем мы дали основные определения, касающиеся понятия когомологий. Привели и доказали несколько теорем и лемму о некоторых свойствах когомологий де Рама.

Второй раздел состоит из двух пунктов. В первом приводятся сведения из теории дифференциальных комплексов и точных последовательностей. Во втором пункте рассматривается точная последовательность, называемая последовательностью Майера-Вьеториса. Доказывается теорема о точности последовательности Майера-Вьеториса.

Третий раздел посвящен гомотопической инвариантности когомологий. Этот раздел необходим для того, чтобы было как можно больше известных когомологий.

Четвертый раздел состоит из нескольких пунктов, в которых рассматриваются примеры вычислений когомологий окружности, двумерной и n-мерной сферы, плоскости без точек, трехмерного и n-мерного пространства без точек, тора.

В приложении указан программный код разбиения на подпространства в пакете Wolfram Mathematica двумерной сферы, плоскости без двух точек, тора.

Основное содержание работы. В данной части работы, нами будут максимально подробно разобраны все основные аспекты по данной теме.

Определение 1.1. Гладкая дифференциальная форма степени k — гладкое отображение, которое каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие элемент из $\Lambda^k\left(T_p^*(M)\right)$.

Определение 1.2. Пусть $\Omega^*(M) = \oplus\Omega^k(M)$. Внешним дифференциалом называется линейное отображение $d\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

$d\left(\omega \wedge \tau\right) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau, k = deg\omega$

2. $d \circ d = 0$

3. $f \in \Omega^0(M)$, X — векторное поле, $df(X) = Xf$.

Определение 1.3. Дифференциальная форма ω на гладком многобразии M называется замкнутой, если $d\omega = 0$. Форма ω называется точной, если ее можно представить в виде $\omega = d\tau$, для некоторой формы $\tau \in \Omega^{k-1}(M)$.

Обозначим через $Z^k(M)$ пространство замкнутых форм степени k, а через $B^k(M)$ пространство точных k-форм.

Определение 1.4. Фактор-пространство $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ называется k-мерными когомологиями де Рама многообразия M.

Далее приводятся теоремы и лемма о некоторых свойствах когомологий де Рама.

Теорема 1.2. Если многообразие M состоит из r связных компонент, то $H^0(M) = \mathbb{R}^r$.

Теорема 1.3. Для многообразия M размерности n, $H^k(M) = 0$, если $k > n$.

Теорема 1.5. Если многообразия M и N диффеоморфны, то $H^k(M) \cong H^k(N)$, $\forall k$.

Из теоремы следует, что когомологии являются инвариантами гладких многобразий.

Лемма 1.6. Пусть многообразие $M = M_1 \coprod M_2$, где M_1, M_2 - гладкие многообразия, тогда

$$H^k(M) \cong H^k(M_1) \oplus H^k(M_2).$$

Для вычисления когомологий де Рама нам понадобятся сведения из теории дифференциальных комплексов и точных последовательностей. Далее мы приводим эти сведения.

Прямая сумма векторных пространств $C = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$, занумерованная целыми числами, называется *дифференциальным комплексом*, если заданы такие гомоморфизмы

$$\cdots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow \cdots,$$

что $d^2 = 0$.
Гомоморфизм d называется *дифференциалом* комплекса C.

Пространство $\Omega^*(M)$ дифференциальных форм на многообразии M вместе с внешним дифференциалом d, является примером дифференциального комплекса и называется комплексом де Рама.

Когомологиями комплекса C называется прямая сумма векторных пространств $H(C) = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} H^q(C)$, где $H^q(C) = (Ker\, d \cap C^q) \setminus (Im\, d \cap C^q)$.
Определение 2.1. Пусть A и B дифференциальные комплексы.
Коцепным отображением или гомоморфизмом дифференциальных комплексов $f\colon A \to B$ называется набор линейных отображений $f_k\colon A^k \to B^k$, которые коммутируют с дифференциалом, то есть

$$d \circ f_k = f_{k+1} \circ d.$$

Далее для простоты индекс k у отображений будем опускать.
Определение 2.2. Последовательность векторных пространств и линейных отображений

$$\dots \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \longrightarrow \dots$$

называется точной, если для всех i ядро отображения f_i совпадает с образом предыдущего отображения f_{i-1}. Точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \longrightarrow 0$$

называется короткой точной последовательностью.

Определение 2.3. Последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

называется короткой точной, если f и g — коцепные отображения и $\forall k$ последовательность

$$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{f} B^k \xrightarrow{g} C^k \longrightarrow 0 \quad -$$

короткая точная последовательность векторных пространств.

Далее приведем важную теорему из теории точных последовательностей.

Теорема 2.1. Короткая точная последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

порождает длинную точную последовательность в когомологиях.

$$\ldots \xrightarrow{d^*} H^k(A) \xrightarrow{f^*} H^k(B) \xrightarrow{g^*} H^k(C) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(A) \xrightarrow{f^*} \ldots$$

Лемма 2.2. Пусть

$$0 \longrightarrow V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{m-1}} V_m \longrightarrow 0$$

— точная последовательность векторных пространств, тогда

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dim V_k = 0.$$

Пусть M — многообразие, $\Omega^*(M)$ — комплекс дифференциальных форм на M. $\{U, V\}$ — открытое покрытие многообразия M.

Определим следующие отображения включения

$$i_V \colon V \to M,$$

$$i_U \colon U \to M,$$

$$j_U \colon U \cap V \to U,$$

$$j_V \colon U \cap V \to V.$$

Тогда определены отображения ограничения области определения формы

$$i_U^* \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(U),$$

$$i_V^* \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(V),$$

$$j_U^* \colon \Omega^k(U) \to \Omega^k(U \cap V),$$

$$j_V^* \colon \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V).$$

Определим отображения:

$$i \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^K(V)$$

и

$$j \colon \Omega^k(U) \oplus \Omega^K(V) \to \Omega^k(U \cap V),$$

такие что

$$i(\sigma) = (i_U^* \sigma, i_V^* \sigma) = (\sigma\,|_U, \sigma\,|_V),$$

$$j(\omega, \tau) = j_V^* \tau - j_U^* \omega = \tau\,|_{U \cap V} - \omega\,|_{U \cap V}.$$

Если $U \cap V = \oslash$, то $\Omega^k(U \cap V) = 0$ и j – нулевое отображение.

Точность последовательности Майера-Вьеториса является нашей первой задачей после изложения основ теории когомологий де Рама. Последовательность точная в том смысле, что ядро каждого отображения совпадает с образом предыдущего. Этому факту посвящена следующая теорема.

Теорема 2.3. Последовательность Майера-Вьеториса

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\ i\ } \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\ j\ } \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0 \qquad (2.2)$$

точна.

Следствие 2.4. Последовательность (2.2) индуцирует длинную точную последовательность в когомологиях, которая также называется последовательностью Майера-Вьеториса:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\ d^*\ } H^k(M) \xrightarrow{\ i^*\ } H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\ j^*\ } \\ \xrightarrow{\ j^*\ } H^k(U \cap V) \xrightarrow{\ d^*\ } H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Далее мы рассматриваем гомотопическую инвариантность когомологий де Рама.

Определение 3.1. Пусть M и N — гладкие многообразия. Два гладких отображения $f, g\colon M \to N$ называется гладко гомотопными, если существует гладкое отображение $F\colon M \times \mathbb{R} \to N$, такое что:

$$F(x,0) = f(x),$$
$$F(x,1) = g(x).$$

Определение 3.2. Гладкие многообразия M и N называются гомотопически эквивалентными, если сущетвуют отображения $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to M$, такие что $g \circ f \sim 1_M, f \circ g \sim 1_N$.

Отображения f и g называются гомотопически обратными, f гомотопической эквивалентностью. Многообразия гомотопически эквивалентные точке называются стягиваемыми.

Например, S^1 и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентны.

Теорема 3.4. Гомотопные отображения $f, g\colon M \to N$ индуцируют равные отображения в когомологиях $f^\# = g^\#\colon H^k(N) \to H^k(M)$.

Лемма 3.5. Когомологии де Рама гомотопически эквивалентных многообразий изоморфны.

Теорема 3.6. Лемма Пуанкаре.

$$H^k(\mathbb{R}^n) = 0, \text{при } k > 0$$

$$H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}.$$

В работе вычисляются когомологии де Рама, на примере окружности, двумерной и n-мерной сферы, плоскости без точек, трехмерного и n-мерного пространства без точек, тора. Здесь я приведу некоторые результаты вычислений.

Когомологии де Рама окружности задаются выражением

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{для} \quad k = 0, 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Когомологии де Рама двумерной сферы задаются выражением

$$H^k(S^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{для} \quad k = 0, 2; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заключение. Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: даны основные определения, касающиеся понятия когомологий де Рама; доказана теорема о точности последовательности Майера-Вьеториса; рассмотрено свойство гомотопической инвариантности когомологий. Также для вычисления когомологий де Рама применили последовательность Майера-Вьеториса и гомотопическую инвариантность, на примере окружности, двумерной и n - мерной сферы, плоскости и поверхности без точек, тора. Разбиение на подпространства двумерной сферы, плоскости без двух точек и тора было проиллюстрировано в пакете Wolfram Mathematica.

В заключении, тема вычисления когомологий де Рама с помощью последовательности Майера-Вьеториса крайне важна, так как когомологии де Рама это такой инструмент, способный выражать основную топологическую информацию о многообразиях. А последовательность Майера-Вьеториса, в свою очередь, позволяет нам как можно проще получить результаты вычислений когомологий де Рама.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли/ Ф.Уорнер; пер. Ф. Ф. Воронова, А. В. Хохлова; под ред. А. А. Кириллова. М.: Мир, 1987. 304 с.

2. Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии/ А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. 439 с.

3. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Гладкие многообразия/ М. М. Постников. М.: Наука, 1987. 480 с.

4. Новиков, С. П. Современные геометрические структуры и поля/ С. П. Новиков, И. А. Тайманов. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.

5. Tu, L. W. An Introduction to Manifolds/ L. W. Tu. Springer, 2008. 350 p.

6. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия/ А. В. Погорелов; под ред. А. Ф. Лапко. М.: Наука, 1974. 176 с.

7. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии/ П. К. Рашевский. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. - 426 с.

8. Понтрягин, Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий/ Л. С. Понтрягин. М.: Едиториал УРСС, 2004. 176 с.

9. Акивис, М. А. Тензорное исчисление/ М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. М.: Наука, 1969. 287 с.

10. Ефимов, Н. В. Введение в теорию внешних форм/ Н. В. Ефимов. М.: Наука, 1977. 85 с.

11. Ботт, Р. Дифференциальные формы в алгебраической топологии/ Р. Ботт, Л. В. Ту. М.: Наука, 1989. 336 с.

12. Де Рам, Ж. Дифференцируемые многообразия/ Ж. Де Рам; пер. Д. А. Василькова. М.: Изд-во ин-й лит-ры, 1956. 248 с.

13. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы теории гомологий/ Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1984. 344 с.

14. Прасолов, В. В. Элементы теории гомологий/ В. В. Прасолов. М.: МЦНМО, 2006. 448 с.

15. Казарян, М. Э. Введение в теорию гомологий/ М. Э. Казарян; под ред. Д. В. Трещева. М.: МИАН, 2006. 106 с.

16. Виро, О. Я. Элементарная топология/ О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. М.: МЦНМО, 2012. 446 с.

17. Хирш, М. Дифференциальная топология/ М. Хирш. М.: Мир, 1979. 280 с.

18. Веблен, О. Основания дифференциальной геометрии/ О. Веблен, Дж. Уайтхед; пер. М. Г. Фрейдиной. М.: ИЛ, 1949. 230 с.

19. Стернберг, С. Лекции по дифференциальной геометрии/ С. Стернберг; пер. Д. В. Алексеевского; под ред. А. Л. Онищика. М.: Мир, 1970. 412 с.

20. Троицкий, Е. В. Дифференциальная геометрия и топология/ Е. В. Троицкий. М.: Мир, 2003. 52 с.