Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии
наименование кафедры

Представление ориентируемых и неориентируемых компактных поверхностей и их нормальные формы

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Мешковой Виктории Эдуардовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор,д.ф.-м.н. Поплавский В.Б.
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н. Розен В.В.
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение Топология-сравнительно молодой и очень важный раздел математики. В современной математике переплетаются идеи топологии и алгебры. И многие идеи топологии возникают из наблюдения за окружающим миром. За пределами старой геометрии остаются многие факты, которые не дают полного представления о топологических свойствах и соотношениях. Какой бы длиной ни обладала линия, она может быть либо замкнутой, либо нет, если она замкнута, то может сложным образом "заузляться". Тела поверхности могут иметь "дырки". Такие свойства характеризуются тем, что они не меняются при деформациях, которые допускают различные растяжения без разрывов. Они имеют название топологических.

Первые важные наблюдения были сделаны Эйлером, Гауссом и Риманом. В 1752 году Эйлер опубликовал формулу,связывающую между собой количество граней трёхмерного многогранника. Эйлерова характеристика замкнутой ориентируемой поверхности связана с её родом g (числом ручек, которое представляет собой количество торов в связной сумме, представляющей данную поверхность). Эйлерова характеристика замкнутой неориентируемой поверхности имеет связь с её родом k, где k это число проективных плоскостей в связной сумме, которые представляют поверхность.

Позднее, в 1858 году А. Мёбиус установил существование односторонних поверхностей и стал знаменитым, благодаря изобретению листа Мёбиуса, который является простейшей двумерной поверхностью с краем. Это также является большим вкладом в изучении представления ориентируемых и неориентируемых поверхностей.

Целью данной работы является изучение двумерных топологических поверхностей, их свойств. Определение топологически эквивалентных многообразий.

Для достижения цели были определены следующие задачи:

- дать определение ориентации компактных поверхностей;
- определить род поверхности, как топологической характеристики;
- рассмотреть топологически эквивалентные поверхности.

Работа состоит из введения, основной части из 3 разделов, заключения, списка использованных источников.

Первый раздел состоит из 4 пунктов. В них даётся понятие триангуляции и приводятся примеры триангулируемых поверхностей. Вводится понятие ориентации, также показаны примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей и рассматриваются нормальных формы поверхностей.

Второй раздел состоит из 3 пунктов. Он посвящён более подробному рассмотрению неориентируемых поверхностей. Определяются неориентируемые поверхности. Приводится классификационная теорема для компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. Рассматривается эйлерова характеристика поверхности.

Основное содержание работы

Определение 1.1. Рассмотрим поверхность M с определённой на ней такой совокупностью треугольников Δ, что точка P на M лежит хотя бы в одном из треугольников Δ и:

1) если точка P находится в треугольнике s^2 и при этом она не лежит на стороне s^2, то больше не существует треугольников, содержащих P, кроме s^2 и $\left|s^2\right|$ окрестность P
2) если треугольник s_1^2 содержит на своей стороне s^1 точку P, не являющуюся его вершиной, то в этом случае есть наличие треугольника s_2 из Δ такого, что $\left|s_1^2\right| \bigcap \left|s_2^2\right| = \left|s^1\right|$, при этом треугольников, кроме s_1^1 и s_2^2, содержащих P, не существует и $\left|s_1^2\right| \bigcup \left|s_2^2\right|$— окрестность точки P
3) если у треугольника s_1^2 вершиной является точка P, то существуют треугольники $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2$ (k— конечное число),имеющие также своей вершиной P, причём любая из соседних пар треугольников s_j^2 и s_{j+1}^2 имеют только одну общую сторону. Треугольники $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2$— единственные треугольники, содержащие P, и имеют только одну общую сторону с s_k^2, а $\left|s_1^2\right| \bigcup \left|s_2^2\right| \bigcup \ldots, \bigcup \left|s_k^2\right|$— окрестность P.

При выполнение всех этих условий называется триангуляцией, M— триангулируемым многообразием.

Для того, чтобы более точно определить ориентацию поверхности необходимо ввести понятие барицентрических координат.

Определение 1.5. Рассмотрим P_0, P_1,..., P_n, $n = 0, 1, 2$ это вершины евклидова n-симплекса в Евклидовой плоскости E^2. Выберем координатную систему и (x_1, x_2) в E^2. В этой системе каждая вершина имеет координаты (

x_{1k},x_{2k}). В каждой вершине P_k разместим неотрицательную точечную массу μ_k так, что полная масса во всех $n+1$ вершинах равна единичной массе: $\mu_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mu_k = 1$. Это распределение масс имеет центр тяжести P=(x_1, x_2) , определяемый формулами

$$\mathrm{x}_j = \sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathrm{x}_{jk},\ j = 1, 2.$$

Числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ называются барицентрическими координатами точки P n-симплекса.

Определение 1.6. *Барицентрическим отображением* n-симплекса e_1^n r-симплекс e_2^r, $r \leq n$, называется отображение, которое:

1) переводит каждую вершинуe_1^n в одну из вершин e_2^r

2)при этом каждая вершина e_2^r является образом по крайней мере одной вершина e_1^n

3)Если массы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ помещены в вершинах e_1^n и такие же массы помещены в образах вершин e_2^r, центр тяжести e_1^n переходит в центр тяжести e_2^r

Определение 1.10. Говорят, что n-симплекс, n=0,1,2, на многообразии M ориентирован,если для его $n+1$ вершин установлен определенный порядок.Два порядка вершин определяют одинаковую ориентацию, если один порядок может быть получен из другого чётной подстановкой множества его вершин.

Определение 1.11. Два примыкающих треугольника называют *когерентно ориентированными*, если они индуцируют противоположные ориентации на их общей стороне. Простая цепь треугольников $t_1^2, t_2^2, \ldots, t_n^2$, $n > 2$, называется замкнутой, если t_1^2 и t_n^2 имеют общую сторону.

Определение 1.12. Замкнутая цепь треугольников когерентно ориентирована, если каждый треугольник ориентирован таким образом, что любая пара прилегающих треугольников имеет когерентную ориентацию. Многообразие является ориентируемым, если на нём каждая простая замкнутая цепь треугольников может быть когерентно ориентирована. В противном случае оно является неориентирумым.

Теорема 1.8. Если поверхность S является ориентируемой, то можно приписать ориентацию каждому треугольнику так, что пара прилегающих треугольников будут когерентно ориентированы.

Нормальными формами для компактных поверхностей являются модели гомеоморфные рассматриваемой поверхности. При этом, любая компактная ориентированная поверхность гомеоморфна одной и только одной нормальной форме.

Пусть S_1 и S_2-непересекающиеся поверхности. Связная сумма этих пространств обознается через $S_1 \# S_2$ и образуется вырезанием малого круга из каждой поверхности и затем склеиванием этих двух поверхностей вдоль границы кругов. С помощью, такой связной суммы можно строить примеры компактных поверхностей.

Теорема 1.9. Любая компактная поверхность гомеоморфна либо сфере, либо связной сумме торов, либо связной сумме проективных плоскостей.

Ввдём понятие эйлеровой характеристики поверхности. Пусть M- компактная поверхность с триангуляцией$(T_1, \ldots, T_n)$. Пусть

ν-количество вершин в M

e-количество рёбер в M

t-количество треугольников в M

Тогда число

$$\chi(M) = \nu - e + t$$

называется *эйлеровой* характеристикой поверхности M

Поверхность являющаяся связной суммой n торов или n проективных плоскостей, называется поверхностью рода n, при этом сфера поверхность рода 0. Род g и эйлерова характеристика χ компактной поверхности связаны формулой

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi) & \text{в ориентируемом случае} \\ 2\text{-}\chi & \text{в неориентируемом случае} \end{cases}$$

Предложение 2.1. Пусть S_1 и S_2— компактные поверхности. Тогда справдлива следующая формула, связывающая эйлеровы характеристики и связную сумму S_1 и S_2

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Заключение Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: определена триангуляция поверхностей ориентируемых и неориентируемых, с краем и без. Были рассмотрены примеры компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. Также было введено важное понятие рода поверхности, как её топологичесой характеристики-это позволило увидеть, что существуют топологически эквивалентные многообразия.

В заключении, тема рассмотрения топологических многообразий очень важна, так как топология имеет переплетение не только с алгеброй,но со множеством других видов наук. Изучение различного рода поверхностей; их свойств и соотношений несёт в себе не только научную роль, но все полученные данные могут непосредственно быть использованными в реальной жизни.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров , П.С. Комбинаторная топология / П. С. Александров. М.: ГИТТЛ, 1947. 660с.

2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. М.: Наука, 1977. 368 с.

3. Александров, П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. М.: Наука, 1971. 144 с.

4. Александрян, Р .А. Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. М.: Высшая шола, 1979. 336 с.

5. Бальдассари, М. Алгебраические многообразия / М. Бальдасари. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 308с.

6. Болтнянский, В. Г. Наглядная топология / В. Г. Болтнянский, В. А. Ефремович. М.:Наука, 1983. 160 с.

7. Борисович, Ю.Г. (Близняков, Н.М., Израилевич, Я.А., Фоменко, Т.Н.) Введение топологию-2-е изд., доп. / Ю. Г. Борисович. М.:Наука. Физмат, 1995. С.80-91

8. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры / Н. Бурбаки. М.: Наука, 1968. 272 с.

9. Долбилин, Н. П. Три теоремы о выпуклых многогранниках / Н. П. Долбилин. // Квант, № 5, 2001. С. 7-12.

10. Дольд, А. Лекции по алгебраической топологии / А. Дольд. М.:Мир, 1967. 464 с.

11. Дубровин, Б. А. (Новиков С. П., Фоменко А. Т.) Современная геометрия: Методы теории гомологий / Б. А. Дубровин. М.: Наука, 1984.

12. Зейферт, Т. Топология / Т. Зейферт, В. Трельфалль. М.; Л.: ГОНТИ, 1938. 448 с.

13. Келли, Дж. Общая топология / Дж. Келли. М.: Наука., 1981. 432 с.

14. Кокстер, Г. С. М. Действительная проективная плоскость./ Г. С. М. Кокстер. М:Физматгиз, 1959. 280 с.

15. Кокстер, Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. М.: Наука, 1966. 648 с.

16. Коснёвски, Ч. Начальный курс алгебраической топологии / Ч. Коснёвски. М.: Мир, 1983. 302 с.

17. Масси, У. Алгебраическая топология / У. Масси. М.: Мир, 1977. С.16-68

18. Рохлин, В.В. Начальный курс топологии. Геометрические главы/ В. В. Рохлин, Д. Б. Фукс. М.:Наука,1977. 488 с.

19. Синюков, Н. С. Топология / Н. С. Синюков, Т. И. Матвеенко. Киев: высшая школа, 1984. 264 с.

20. Спрингер, Дж. Введение в теорию римановых поверхностей / Дж. Спрингер. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. С. 113-168

21. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. М.: Мир, 1989. 400 с.