Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

ОРИЦИКЛЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы
направления 02.03.01 математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Ефремова Алексея Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ________________ Ромакина Л.Н

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ Розен В.В.

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

1. Актуальность темы. Орицикл гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны является аналогом орицикла, или предельной линии, плоскости Лобачевского [1], [2], [3], которая определяется как множество точек, симметричных некоторой данной фиксированной точке относительно прямых пучка, паралллельных друг другу в одном и том же направлении. В проективной интерпретации определить орицикл можно позиционно, его положением по отношению к абсолюту. Это линия, касающаяся абсолюта в четырех слившихся точках. Как и в геометрии Лобачевского (см. [1, с. 365]) орицикл плоскости $\widehat{H}$ может быть использован в построении орициклических систем координат, успешно применяемых при вычислении площадей фигур [4], [5], а также при построении разбиений плоскости $\widehat{H}$ [6], [7].

2. Цели и задачи работы. Целью данной работы является изучение орициклов гиперболической плоскости положительной кривизны. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1) определена гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны;

2) изучены преобразования фундаментальной группы плоскости $\widehat{H}$;

3) определены циклы плоскости $\widehat{H}$;

4) изучены свойства орициклов плоскости $\widehat{H}$;

5) рассмотрено применение орициклов при вычислении площадей фигур.

3. Структура работы. Данная магистерская работа имеет реферативный характер, она состоит из введения, трех разделов и списка использованных источников, содержащего 21 наименование.

4. Краткая характеристика работы. В первом разделе «Классическая схема . Основные факты » рассмотрена проективная модель Кэли-Клейна гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны. Так же в проективной модели даны определения абсолюта, определение плоскости Лобачевского, т. е. гиперболической плоскости отрицательной кривизны. Кроме того определена сама гиперболическая плоскость положительной кривизны. Определено понятие фундаментальной группы G плоскости $\widehat{H}$ как группы всех проективных автоморфизмов овальной линии γ, называемой *абсолютом.* А так же рассмотрена теорема, о том что тип прямой плоскости $\widehat{H}$ инвариантен относительно группы G.

Во втором разделе «Циклы с непараболической базой» рассмотрены циклы на плоскости $\widehat{H}$, базой которых служит непараболическая прямая. Даны определения гиперцикла, гиперболического цикла и эллиптического цикла. А так же рассмотрены их свойства.

В третьем разделе «Орицикл плоскости $\widehat{H}$» дано определение орицикла плоскости $\widehat{H}$, доказаны основные свойства орицикла, в том числе оптические, рассмотрено применение орициклов при вычислении площадей некоторых фигур плоскости $\widehat{H}$.

5. Методы работы. Первым этапом подготовки работы было знакомство с литературой по теме исследования. На этом этапе отобран и систематизирован материал, содержащий основные понятия геометрии плоскости $\widehat{H}$, и материал непосредственно об орициклах данной плоскости. Выбор модели для изучения объектов плоскости $\widehat{H}$ проведен на основе сравнения двух ее различных интерпретаций, проективной и на сфере в пространстве Минковского. В первой модели все объекты плоскости $\widehat{H}$ рассматриваются на двумерной проективной плоскости P_2, во второй — на двумерной поверхности второго порядка в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Увеличение размерности пространства реализации геометрии плоскости $\widehat{H}$ естественно приводит к усложнению исследования. Поэтому для работы была принята проективная модель Кэли – Клейна. Все доказательства проведены аналитически в проективных координатах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе работы, следуя [8, §4.1], описана проективная модель гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны. Предварительно введено понятие классической схемы Кэли–Клейна.

На проективной плоскости P_2 образ второго порядка определяет девять плоскостей с проективными метриками. Эти плоскости, а так же соответствующие им геометрии называют классическими плоскостями или геометриями в схеме Кэли–Клейна. Три из них — плоскости с аффинной базой: *евклидова*, ее абсолют — прямая с парой мнимо сопряженных точек на ней, *псевдоевклидова* (плоскость Минковского), ее абсолют — прямая с парой действительных точек на ней и *флаговая* (плоскость Галилея), абсолют которой состоит из прямой с действительной точкой на ней. Образы, соответствующие по принципу двойственности (см., например, [8], [10]) абсолютам плоскостей с аффинной базой, определяют на P_2 *коевклидову* плоскость, ее абсолют — пара мнимо сопряженных прямых,*копсевдоевклидову* плоскость, ее абсолют — пара действительных прямых. Нулевая линия [10] определяет на P_2 *эллиптическую* плоскость. Овальная линия (см. [10]) проективной плоскости служит абсолютом различных неевклидовых плоскостей. Проективную плоскость P_2 с фиксированной овальной линией γ назовем *расширенной гиперболической плоскостью* и обозначим H^2.

Прямые на плоскости H^2 в зависимости от положения по отношению к абсолютной линии γ могут быть трех типов. *Гиперболические* прямые пересекают абсолют в двух действительных точках, *эллиптические* прямые — в двух мнимо сопряженных точках. *Параболические* прямые касаются абсолюта.

На множестве всех внутренних относительно абсолюта точек плоскости H^2 реализуется *гиперболическая плоскость отрицательной кривизны*. Если на внешней относительно абсолюта овальной линии γ области расширенной гиперболической плоскости H^2 в качестве прямых принять эллиптические прямые и части гиперболических и параболических прямых, принадлежащих указанной области, получим *гиперболическую плоскость* $\widehat{H}$ *пололожительной кривизны.*

Фундаментальной группой плоскости $\widehat{H}$, обозначим ее G, называют группу проективных автоморфизмов овальной линии (см. [8], [10]). Фигуры Φ_1, Φ_2 плоскости $\widehat{H}$ назовем *конгруэнтными*, или *равными*, или *G-эквивалентными*, если существует преобразование f группы G такое, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$. Обозначение конгруэнтности фигур: $\Phi_1 \cong \Phi_2$.

В работе использованы две различные прямолинейные координатные системы плоскости $\widehat{H}$, оперделенные согласно [8, гл. 2, 4].

Каноническим репером первого типа плоскости $\widehat{H}$ назовем проективный репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого попарно сопряжены относительно абсолюта γ, вершина A_3 лежит во внутренней области относительно абсолюта, а единичная точка E находится на пересечении параболических прямых, проведенных из вершин A_1, A_2.

Каноническим репером второго типа плоскости $\widehat{H}$ называют проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины A_1, A_2 и единичная точка E которого принадлежат абсолютной линии γ, а вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта.

Семейство U^3_* (U^3) всех канонических реперов первого (второго) типа плоскости $\widehat{H}$ зависит от трех параметров (см. [8, гл. 4]).

Второй раздел работы посвящен циклам с непараболической базой.

Циклы плоскости $\widehat{H}$ — это овальные линии, которые из всего множества овальных линий данной плоскости (см. классификацию в [21]) выделяются следующим свойством. Для каждой собственной точки M цикла σ плоскости $\widehat{H}$ существует такое неинволюционное преобразование f группы G, что для любого натурального значения n точка $f^n(M)$ принадлежит линии σ.

Гиперциклом плоскости $\widehat{H}$ называется овальная линия, касающаяся абсолюта в двух совпадающих парах мнимо сопряженных точек.

Эллиптическая прямая, проходящая через мнимо сопряженные общие с абсолютом точки гиперцикла, называется *базой* гиперцикла, а полюс этой прямой относительно абсолюта, несобственная для плоскости $\widehat{H}$ точка, — *центром* гиперцикла.

Гиперболический цикл плоскости $\widehat{H}$ — овальная линия σ, удовлетворяющая условиям: 1) σ касается абсолюта плоскости $\widehat{H}$ в двух точках; 2) каждая точка абсолюта плоскости $\widehat{H}$, за исключением точек касания, является внутренней относительно лини σ.

Эллиптичекий цикл плоскости $\widehat{H}$ — овальная линия σ, удовлетворяющая условиям: 1) σ касается абсолюта плоскости $\widehat{H}$ в двух вещественных точках; 2) каждая точка абсолюта плоскости $\widehat{H}$ (линии σ), за исключением точек касания, является внешней относительно линии σ.

Гиперболическую прямую l, проходящую через несобственные точки гиперболического или эллиптического цикла, назовем *базой*, а точку S, полюс прямой l относительно абсолюта, — *центром* данного цикла.

В третьем разделе работы согласно изложению в книге [20] на плоскости $\widehat{H}$ рассмотрены циклы с параболической базой — орициклы.

Орициклом плоскости $\widehat{H}$ называют овальную линию, касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках. Указанную в определении точку называют *центром*, а ее поляру относительно абсолюта — *базой* орицикла.

Каждая проходящая через центр орицикла гиперболическая прямая называется о*сью* данного орицикла.

Теорема 4.2 [20, Теорема 2.4.21]. *Орицикл плоскости $\widehat{H}$ симметричен относительно каждой своей оси.*

Теорема 4.3 [20, Теорема 2.4.22]. *В каждой собственной точке орицикла плоскости $\widehat{H}$ существует эллиптическая касательная, ортогональная оси орицикла, проведенной через данную примую.*

Согласно теореме 4.3 орицикл плоскости $\widehat{H}$ обладает следующим оптическим свойством: каждый луч, исходящий из центра орицикла по собственным для плоскости $\widehat{H}$ ветвям гиперболических прямых, отражается внешним образом от орицикла в себя.

Теорема 4.4 [20, Теорема 2.4.23]. *Касательная к орициклу плоскости $\widehat{H}$ в каждой его точке разделена точкой косания и базой орицикла пополам.*

В помощью орициклов плоскости $\widehat{H}$ вводится следующим образом ортогональная система координат, названная орициклической.

На плоскости $\widehat{H}$ каждой точке M, не принадлежащей прямой k, поставим в соответствие пару чисел (u, v) следующим образом.

Пусть ω_M — орицикл с базой k, содержащий точку M, и M_1 — точка пересечения орицикла ω_M с прямой l. Обозначим:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk), \quad u = \delta\frac{|OM_1|}{\rho},$$

где $\delta = 1$ ($\delta = -1$), если точка M_1 не принадлежит (принадлежит) лучу OA_1.

Совокупность элементов $C_0 = \{\omega_0, l, E\}$ называется *ортогональной орициклической системой координат* плоскости $\widehat{H}$. Орицикл ω_0 называется *нулевым орициклом*, прямая l — *осью*, точка E — *единичной точкой* системы C_0. Собственная для плоскости $\widehat{H}$ точка O пересечения оси l с нулевым орициклом ω_0 называется *началом* системы координат C_0. Пару чисел $(u; v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, назовем *ортогональными орициклическими координатами* M в системе C_0.

Элемент площади плоскости $\widehat{H}$ в ортогональных орициклических координатах имеет вид

$$DS = \sqrt{\gamma_{uv}^2 - \gamma_{uu}\gamma_{vv}}\, du\, dv = \rho^2 e^v\, du\, dv.$$

Для площади S гомеоморфной диску фигуры F с соответствующей областью D изменения параметров u, v в орициклической параметризации справедлива формула

$$S = \rho^2 \int_D e^v\, du\, dv.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы была рассмотрена проективная модель Кэли–Клейна гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны, даны определения абсолюта, гиперболической плоскости отрицательной кривизны. Кроме того, определена сама гиперболическая плоскость положительной кривизны. Далее введена фундаментальная группа преобразований плоскости $\widehat{H}$ как группа проективных автоморфизмов овальной линии γ. Доказана теорема, о том что тип прямой плоскости $\widehat{H}$ инвариантен относительно групп G. Исследованы циклы плоскости $\widehat{H}$. Даны определения гиперциклу, гиперболическому циклу, эллиптическому циклу, доказаны основные свойства этих объектов. Подробно исследованы орициклы плоскости $\widehat{H}$, в частности, изучены их оптические свойства. В заключении рассмотрены приложения орициклов при вычислении площадей фигур на плоскости $\widehat{H}$. Результаты работы могут стать основой для дальнейшего исследования объектов на плоскости $\widehat{H}$, а также при изучении фигур в пространствах более высоких размерностей, содержащих гиперболические плоскости положительной кривизны как подмногообразия.

Список использованных источников

1. Каган, В. Ф. Основания геометрии. В 2 ч. Ч. 1. Геометрия Лобачевского и ее предистория / В. Ф. Каган. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 492 с.

2. Лаптев, Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия / Б. Л. Лаптев. М. : Просвещение, 1976. 112 с.

3. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства / Б. А. Розенфельд. М. : Наука, 1969. 548 с.

4. Ромакина, Л. Н. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Publications de L'Institut Mathématique. Nouvelle série. 2016. Т. 99, № 113. С. 139–154.

5. Ромакина, Л. Н. Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями / Л. Н. Ромакина // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 3. С. 376–416.

6. Ромакина, Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.

7. Ромакина, Л. Н. Веерные разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Матем. труды. 2013. Т. 16, № 2. С. 142–168.

8. Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. В 4 ч. Ч. 1. Тригонометрия / Л. Н. Ромакина. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2013. 244 с.

9. Кэлли, А. Шестой мемуар о формах / А. Кэли // Об основаниях геометрии : сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей / под ред. А. П. Нордена. М. : ГИТТЛ, 1956. С. 222–252.

10. Ефимов, Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. М. : Наука. 1971. 576 с.

11. Ромакина, Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л. Н. Ромакина. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга». 2008. 279 с.

12. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. М. : ГИТТЛ, 1955. 744 с.

13. Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. М. : МЦНМО, 2003. 560 с.

14. Ромакина, Л. Н. Аналоги функции Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.

15. Ромакина, Л. Н. Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли–Клейна / Л. Н. Ромакина // Сб. науч. тр. междун. конф. «62-е Герценовские чтения» / Санкт-Петербург : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. С. 203–209.

16. Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М. : ОНТИ НКТП СССР, 1936. 432 с.

17. Ромакина, Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h-ломаной / Л. Н. Ромакина // Математика. Соврем. проблемы матем. и механики. 2011. Т. VI, № 3. С. 131–138.

18. Ромакина, Л. Н. Циклы гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 415. С. 137–162.

19. Ромакина, Л. Н. Длина хорды гиперцикла гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 5. С. 1115–1127.

20. Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. В 4 ч. Ч. 2. Преобразования и простые разбиения / Л. Н. Ромакина. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 274 с.

21. Ромакина, Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. С. 37–44.