Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределённости

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

Механико-математический факультет
наименование факультета, института, колледжа

Суркова Виктора Вячеславовича
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

Актуальность темы. Принятие решений – это важная функция управления, которой должен овладеть каждый человек, работающий как на производстве так и в науке. Практически любое решение принимается человеком в условиях неопределенности, то есть при недостатке информации о существенных фактах и предстоящих событиях.

Математические модели принятия решений используют математический аппарат для анализа методики принятия решений и указывают способы нахождения оптимальных альтернатив.

Цель работы: овладеть теоретическими знаниями, практическими умениями и навыками системного подхода к проблеме задачи выбора, к проблеме формализации предметных задач с использованием математических моделей различного типа. Освоить методику выбора метода решения задачи в зависимости от типа и характеристик математической модели, научиться применять информационные технологии при решении задач принятия решений. Особое внимание уделить базовым моделям задач принятия решений: принятие решений в условиях неопределенности, в условиях риска.

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Работа содержит 47 страниц и 20 используемых источников.

Основное содержание работы.

В первой главе работы изучаются математические модели принятия решений в условиях неопределенности. Рассматривается методика исследования задач принятия решений на основе математического моделирования, при этом рассматривается построение математической модели задачи принятия решений; принципы оптимальности и нахождение оптимального решения и анализ полученных результатов.

Методика исследования задач принятия решений (ЗПР) на основе математического моделирования состоит в реализации следующих трех этапов:

1-й этап - построение математической модели ЗПР;

2-й этап — формулировка принципа оптимальности и нахождение оптимального решения;

3-й этап - анализ полученных результатов.

Математическая модель ЗПР в условиях неопределенности может быть задана в виде следующей тройки объектов $\langle X, Y, f \rangle$, где X - множество допустимых альтернатив, Y - множество возможных состояний среды, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ - целевая функция.

Фактически построение такой математической модели принятия решения сводится к заданию целевой функции, определенной на множестве $X \times Y$ и принимающей числовые значения.

Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности состоит в том, что, выбирая одну из допустимых альтернатив, принимающий решение не знает имеющегося состояния среды; в то же время получающийся исход зависит от того, в каком состоянии находится среда. Формально, целевая функция $f(x, y)$ является функцией двух аргументов x и y; принимающий решение должен выбирать значение аргумента $x \in X$, не зная значения аргумента $y \in Y$.

В случае конечных множеств X и Y целевая функция задается табличным способом, а элементы этих множеств различаются по номерам: $X = \{1, ..., i, ..., n\}$, $Y = \{1, ..., j, ..., m\}$. Обозначим $f(i, j) = a_i^j$ Число a_i^j интерпретируется как выигрыш принимающего решение в ситуации (i, j). Тогда целевая функция может быть задана в виде таблицы 1.

Таблица 1.

	1	$\cdots$	j	$\cdots$	m
1	.				.
$\vdots$		.		.	
i			a_i^j		
$\vdots$		.		.	
n	.				.

В таблице на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит число a_i^j - выигрыш принимающего решение в ситуации, когда он выбирает альтернативу i, а среда принимает состояние j. Эта таблица называется также матрицей выигрышей.

Наиболее простой и естественный принцип, по которому сравниваются две альтернативы - это принцип доминирования, состоящий в следующем: говорят, что альтернатива i_1 доминирует альтернативу i_2, если при любом состоянии среды выигрыш принимающего решение при выборе им альтернативы i_1 будет не меньше, чем его выигрыш при выборе альтернативы i_2 (то есть $a_{i_1}^j \geq a_{i_2}^j$ при всех $j = 1, ..., m$). Тогда альтернатива i_1 называется доминирующей, а альтернатива i_2 - доминируемой.

В теории принятия решений постулируется, что доминируемые альтернативы исключаются из дальнейшего рассмотрения. Принцип доминирования состоит в отбрасывании доминируемых альтернатив.

Основной метод, позволяющий найти оптимальную альтернативу в ЗПР в условиях неопределенности, состоит в следующем: Формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать каждой альтернативе единую числовую оценку.

Задание числовой оценки для каждой альтернативы дает критерий для сравнения альтернатив по предпочтению: из двух альтернатив лучшей считается та, которая имеет большую числовую оценку. Альтернативы, имеющие одинаковые оценки, считаются эквивалентными. Тогда оптимальной будет та альтернатива, которая является наиболее предпочтительной, то есть имеет наибольшую числовую оценку.

В первой главе рассмотрены важнейшие типы критериев, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности и содержательно может быть сформулирован в виде: "Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными". При принятии данной гипотезы в качестве оценки i-ой альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i-ой строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка по критерию Лапласа имеет вид:

$$L(i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^j.$$

При введении оценки Лапласа любые две альтернативы будут сравнимыми между собой по предпочтительности: лучшей будет считаться та альтернатива, которая имеет большую оценку по критерию Лапласа.

Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива i^*, которая максимизирует оценку:

$$L(i^*) = \max_{1 \leq i \leq n} L(i).$$

Основной недостаток критерия Лапласа связан с тем, что при нахождении среднего выигрыша может происходить "эффект компенсации"маленьких выигрышей большими, и полученное в результате среднее арифметическое будет тогда очень слабой характеристикой допустимых альтернатив.

Критерий Вальда основан на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в виде: "При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант".

При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $\underline{W}(i) = \min_j a_i^j$ сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия $\underline{W}$. Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая $\underline{W}$, т.е. та альтернатива i^*, для которой будет наибольшим число $\underline{W}$:

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \max_i \min_j a_i^j.$$

Альтернатива i^* называется максиминной, а число $\underline{W}(i^*)$ называется максимином. Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается максиминная альтернатива, называется принципом максимина.

Таким образом, принцип максимина основан на максимизации минимального возможного (то есть гарантированного) выигрыша; поэтому иногда этот принцип называется также принципом максимального гарантированного результата.

Главный недостаток принципа максимина состоит в том, что при выборе решения учитывается только один - наихудший вариант.

Критерий Гурвица связан с введением показателя $0 < \alpha < 1$, называемого показателем пессимизма. Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший - с вероятностью $1 - \alpha$. Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1 - \alpha) \max_j a_i^j.$$

При $\alpha = 1$ данный критерий превращается в "критерий крайнего пессимизма"(то есть в критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ – в "критерий крайнего оптимизма".

Основной недостаток критерия Гурвица состоит в том, что он учитывает только два исхода - наихудший и наилучший. Кроме того, имеется содержательная сложность при использовании критерия Гурвица - назначение показателя пессимизма α.

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей a_i^j в матрицу r_i^j - матрицу рисков. Риском при выборе альтернативы i в состоянии j называется число

$$r_i^j = \left(\max_i a_i^j\right) - a_i^j.$$

Содержательно r_i^j интерпретируется как "мера сожаления"возникающего от незнания истинного состояния среды.

Для критерия Сэвиджа оптимальной считается альтернатива, минимизирующая максимальный риск, то есть здесь используется минимаксный критерий для матрицы сожалений.

В работе проведено сравнение основных критериев на конкретных примерах. Написана программа для нахождения оптимального решения на основе критерия ожидаемого выигрыша.

Во второй главе работы изучаются математические модели принятия решений в условия риска. Рассматривается построение различных математических моделей задачи принятия решений в условиях риска.

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды. Наиболее простой для анализа случай - когда эта дополнительная информация представлена в виде вероятностной меры на множестве состояний среды. Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{1, ..., m\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана вероятностным вектором $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Этот способ задания дополнительной информации о состояниях среды рассматривается в работе.

Во второй главе предметом изучения являются задачи принятия решений, в которых целевая функция (функция выигрыша) представлена в виде таблицы 2 - матрицы выигрышей.

Таблица 2.

	Состояние среды				
Альтернатива	y_1 1	$\cdots$ $\cdots$	y_j j	$\cdots$ $\cdots$	y_m m
1	a_1^1		a_1^j		a_1^m
$\vdots$					
i	a_i^1		a_i^j		a_i^m
$\vdots$					
n	a_n^1		a_n^j		a_n^m

Выбирая альтернативу i, игрок знает, что он получит один из выигрышей $a_i^1, ..., a_i^m$ с вероятностями $y_1, ..., y_m$, соответственно.

Следовательно, сравнение двух альтернатив i_1 и i_2 сводится здесь к сравнению соответствующих им случайных величин ξ_{i_1} и ξ_{i_2}.

Как известно, наиболее естественной числовой характеристикой случайной величины ξ является ее математическое ожидание, обозначаемое через $M\xi$. Если для ЗПР в условиях риска в качестве критерия для сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать альтернативу, максимизирующую ожидаемый выигрыш.

Однако,для ЗПР в условиях риска критерий ожидаемого выигрыша не является адекватным и должен быть изменен с учетом возможных отклонений случайной величины от ее среднего значения.

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от ее среднего значения обычно берется дисперсия $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Имеются два основных критерия:

1. - Критерий ожидаемого выигрыша.

2. - Критерий отклонения случайной величины от ее среднего значения.

Наиболее интересным является "соединение"указанных двух критериев в единый (обобщенный) критерий. В качестве обобщенного критерия рассмотрен $q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma$, где λ - некоторая постоянная. Фактически этот критерий представляет собой взвешенную сумму частных критериев M и σ с весовыми коэффициентами 1 и $-\lambda$. Обобщенный критерий представляет собой взвешенную сумму частных критериев математического ожидания и среднеквадратичного отклонения с некоторыми весовыми коэффициентами. Содержательный смысл обобщенного критерия состоит в том, что увеличение критерия может происходить как за счет увеличения математического ожидания, так и за счет уменьшения среднеквадратичного отклонения.

В многокритериальной ЗПР основная проблема при определении оптимальной альтернативы состоит в выборе одной альтернативы из множества оптимальных по Парето альтернатив. Эта проблема легко решается в случае конечного Парето–оптимального множества, если произведено полное ранжирование Парето–оптимальных альтернатив по предпочтению.

В работе изучено, как устанавливается предпочтение альтернатив по обобщенному критерию. В случае, когда принимающий решение не склонен к риску ($\lambda > 0$). Тогда он стремится увеличить ожидаемый выигрыш и уменьшить риск, то есть критерий M будет здесь позитивным, а критерий σ - негативным. Пусть (a_i) - некоторое множество альтернатив, каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i).

Представив рассматриваемые альтернативы точками на координатной плоскости переменных (M, σ), получим рисунок, из которого находится Парето–оптимальное множество. Окончательный выбор оптимальной альтернативы проводится из этого множества.

Если Парето–оптимальные альтернативы не сравнимы по Парето, то для каждой пары из них вычисляются следующие величины: $\dfrac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}$.

Среди всех этих величин находятся наибольшая и наименьшая.

$$\lambda^0 = \min\left\{\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}\right\}, \qquad \lambda^* = \max\left\{\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}\right\},$$

И в зависимости от λ $\left(\lambda < \lambda^0,\ \lambda > \lambda^*,\ \lambda^0 \le \lambda \le \lambda^*\right)$выявляются оптимальные альтернативы.

Заключение

В работе изучены математические модели принятия решений в условиях неопределенности и риска. Особое внимание уделено базовым моделям задач принятия решений. Освоена методика выбора метода решения задачи в зависимости от типа и характеристик математической модели. Рассмотрены важнейшие типы критериев, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенност, а именно, критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Гурвица, критерий Сэвиджа. Проведено сравнение этих критериев принятия решений на примере выбора проекта электростанции.

Во второй главе работы изучены математические модели принятия решений в условия риска. В работе рассмотрен случай, когда дополнительная информация о состоянии среды представлена в виде вероятностной меры на этом множестве и задана вероятностным вектором. Изучен критерий ожидаемого выигрыша. Подробно рассмотрена задача двухкритериальной оптимизации и два основных метода решения данной задачи: (A) нахождение оптимального решения на основе обобщенного критерия; (B) нахождение оптимального решения на основе отношения доминирования по Парето. Для второго метода приведены два подхода отыскании оптимального решения: отыскание множества Парето–оптимальных альтернатив и сужение множества Парето–оптимальных альтернатив (за счет субоптимизации или лексикографической оптимизации). Проведено сравнение методов (A) и (B) нахождения оптимального решения на примере задачи выбора варианта производимого товара. Написана программа для нахождения оптимального решения на основе критерия ожидаемого выигрыша.