Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Теорема Нётер

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 422 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления (специальности)

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

КАРАБАЛИНОЙ КАРИНЫ КАЖЕМРАТОВНЫ
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. ГАЛАЕВ
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доктор ф.-м. н., профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Соображения симметрии играют большую роль в жизни и, естественно, в ее описании, тем более в совершенном математическом описании. История создания математического описания симметрии, ее видов связана с высшими разделами алгебры, геометрии. Важнейший результат в теоретической физике связан с именем выдающейся женщины-математика Амалии Эмми Нетер.

Настоящая работа посвящена теореме Нётер, которая связывает первые интегралы гамильтоновой системы и симметрию систем дифференциальных уравнений относительно однопараметрических групп преобразований. Эта теорема впервые опубликована в работе Э.Нётер "$InvarianteVariationsproblem$", которая написана в 1918 году.

В настоящее время теорема Нётер имеет большие приложения в математике, физике, вариационном исчислении.

Целью работы является выяснение геометрических структур теоремы Нётер. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- ввести основные определения и понятия;

- рассмотреть симплектическое линейное пространство и симплектическое многообразие;

- доказать лемму о связи векторных полей на кокасательно расслоенном пространстве и теорему Нётер;

- рассмотреть применение теоремы Нётер и решить практическое задание с помощью пакета Wolfram Mathematica.

В основе изложения лежит понятие симплектического многообразия. Работа состоит из введения и основной части, которая с свою очередь состоит из 5 разделов; заключения; приложения и списка используемых источников.

В первом разделе вводятся основные понятия, в частности, понятия внутреннего и внешнего произведения, дифференцирование, антидифференцирование и дифференцирование Ли дифференцильных форм.

Во втором разделе рассматривается симплектическое линейное пространство: основные определения, косоортогональные дополнения и их свойства; изотропные и лагранжева подпространтсва симплектического пространства.

В третьем разделе рассматривается симплектическое многообразие и его свойства, также дается понятие первого интеграла.

Четвёртый раздел посвящен самой теореме Нётер. Центральным местом доказательства является лемма о связи векторных полей на кокасательно расслоенном пространстве и его базе. На основе этой леммы теорема Нётер доказывается легко.

В пятом разделе рассматривается пример движения n тел в поле тяготения и демонстрируется непосредственное применение теоремы Нётер.

В Приложении А содержится практическое задание и программный код в Wolfram Mathematica для решения практического задания.

Основное содержание работы. В данной части работы, нами будут максимально подробно разобраны все основные аспекты по данной теме.

Пусть E – n-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел.

Определение 1.1. *Полилинейной формой степени* p на линейном пространстве E называется отображение

$$\alpha : \overset{p}{\underset{1}{X}} E \to R,$$

где R - поле действительных чисел, такое, что для любого номера i выполняется следующее условие:

$$\alpha(v_1, ..., \lambda v_i + \mu v_i^{'}, ..., v_p) = \lambda\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_p) + \mu\alpha(v_1, ..., v_i^{'}, ..., v_p),$$

где $v_i \in E, i = 1, ..., p, \quad \lambda, \mu \in R.$

Определение 1.2. Полилинейная форма α называется *внешней (кососимметрической)*, если её значение меняет знак при перестановке любых двух аргументов:

$$\alpha(..., v_i, ..., v_k, ...) = -\alpha(..., v_k, .., v_i, ...).$$

Определение 1.4. *Внешним произведением* называется форма $\alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(E)$, определяемая условием:

$$\alpha \wedge \beta = \eta(\alpha \otimes \beta),$$

где η - операция альтернирования.

Определение 1.5. *Внутренним произведением* вектора u на форму α называется форма

$$i(u)\alpha \in A^{p-1}(E),$$

опеределённая условием:

$$(i(u)\alpha)(\upsilon_1, ..., \upsilon_{p-1}) = p_\alpha(u, \upsilon_1, ..., \upsilon_{p-1})$$

где $\upsilon_1, ..., \upsilon_{p-1} \in E$.

Опеределение 1.9. *Дифференцированием Ли* вдоль векторного поля ξ называется дифференцирование степени 0 алгебры форм, определяемое равенством:

$$L_\xi = i_\xi d + di_\xi$$

Определение 2.1. Билинейная форма $B(x, y)$ называется *невырожденной*, если определеитель матрицы B_{ij} отличен от нуля, т.е. $|(B_{ij})| \neq 0$..

Далее определим кососимметричность нашей формы.

Билинейная форма $B(x, y)$ называется *кососимметрической*, если $B(x, y) = -B(x, y)$ для любых двух векторов $x, y \in V$.

А теперь, непосредственно, перейдём к понятию симплектического линейного пространства.

Определение 2.2. Пусть V - чётномерное линейное пространство, это означает, что $n = 2m$. Тогда линейное пространство V с заданной в нём невырожденной билинейной кососимметрической формой w называется *симплектическим линейным пространством.*

Определение 2.4. Два вектора ξ и η симплектического пространства V называются *кософртогональными*, если их кососкалярное произведение равно нулю, т.е. $\langle \xi, \eta \rangle = 0$.

В частности, в симплектическом пространстве каждый вектор сам себе кософртогонален.

Определение 2.5. Пусть P - некоторое подпространство симплектического пространства V, т.е. $P \subset V$. Тогда *кософртогональным дополнением* подпространства P называется множество $P^{\perp}$ всех векторов из V, ортогональных каждому вектору из P:

$$P^{\perp} = \Big\{ y \in V, (x, y) = 0 \text{ для всех } x \in P \Big\}$$

Рассмотрим некоторые свойства кософртогональных дополнений, которые нам потребуются для доказательства основных теорем.

1) кософртогональное дополнение любого множества является подпространством;

2) если $P \subset G$, то $P^{\perp} \supset G^{\perp}$;

3) если P является нулевым подпространством $\{0\}$, то $P^{\perp} = V$;

4) в любом симплектическом пространстве V для каждого подпространства имеет место формула:

$$dim P^{\perp} = n - dim P, \text{ где } n = dim V.$$

Определение 2.6. Будем говорить, что k - мерное подпространство P симплектического пространства V является *изотропным* (или нулевым), если оно себе кософртогонально, т.е. кососкалярное произведение любых двух векторов ξ и η подпространства равно нулю: $\langle \xi, \eta \rangle = 0$.

Определение 2.7. Изотропные подпространства P, максимально возможной размерности m, называются *лагранжевыми.*

Они характеризуются тем, что $P^{\perp} = P$.

Определение 3.3. Дифференциальная форма ω называется *симплектической*, если она удовлетворяет условиям:

1. $d\omega = 0$, то есть форма ω - замкнута;
2. в каждой ее точке ранг равен $2n$:

$$rang \;\; \omega_x = 2n$$

Это верно для любого элемента $x \in X$.

Определение 3.4. Многообразие X заданное вместе с симплектической формой называется *симплектическим многообразием.*

Пусть X - $2n$-мерное симплектическое многообразие, его мы будем обозначать следующим образом: (X, ω).

Определение 3.5. *Гамильтоновой системой* на многообразии (X, ω) называется векторное поле ξ такое, что образ этого поля при каноническом изоморфизме $I\omega$ будет замкнутой формой, то есть:

$$d(I\omega\xi) = 0$$

или

$$di_\xi\omega = 0$$

Теорема 3.2. *Векторное поле ξ является гамильтоновой системой тогда и только тогда, когда прозводная Ли от формы ω вдоль векторного поля ξ равна нулю*

$$L_\xi\omega = 0$$

На основе введенных понятий, рассмотрим первые интегралы гамильтоновой системы.
Пусть имеется многообразие X и на нем задано векторное поле ξ.

Определение 3.7. *Первым интегралом* векторного поля ξ называется функция $f \in F(X)$ что :

$$\xi f = 0$$

$\xi f = 0$ - это означает, что

$$df(\xi) = 0$$

следовательно, функция $f = const$ вдоль векторного поля ξ.

Опеределение 3.8. Замкнутая форма α называется *первым интегралом* векторного поля ξ, если

$$\alpha(\xi) = 0$$

Пусть векторное поле ξ - является гамильтоновой системой на симплектическом многообразии X.

Теорема 3.3. *Пусть векторное поле ξ является гамильтоновой системой, тогда форма α, равная:*

$$\alpha = i_\xi \omega,$$

есть первый интеграл.

Этот первый интеграл является интегралом энергии.

Существует ряд методов нахождения первых интегралов. Одним из них является теорема Нётер.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие X.

$u^1, ..., u^n$ - координатные функции на X, они состовляют локальную карту χ.

Рассмотрим кокасательно расслоенное пространство $T^*(X)$, в нём в качестве элементов выступают линейные формы. Определим на пространстве $T^*(X)$ локальную карту $\widetilde{\chi}$.

Для этого рассмотрим каноническую проекцию q:

$$q : T^*(X) \longrightarrow X$$

На пространстве $T^*(X)$ координатами являются функции q^i и p_i, где
$q^i = u^i \circ q$
$p_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$
$i = 1, ..., n$

Форма α в этих координатах будет иметь вид:

$$\alpha = p_i dq^i$$

Таким образом, мы получили локальную карту $\widetilde{\chi} \in T^*(X)$.
Пусть $\tau^*(X) = (T^*(X), q, X^n)$ - касательное расслоение многообразия X^n.
Пусть форма $\alpha \in T^*(X)$. В этом пространстве она будет точкой. И в этой точке α касательным пространством будет:

$$T_\alpha(T^*(X))$$

Следовательно, если:

$$q : T^*(X) \longrightarrow X$$

то

$$q_* : T_\alpha(T^*(T(X))) \longrightarrow T_{q(\alpha)(X)}.$$

Значит, если мы возьмем вектор $v \in T_\alpha(T^*(X))$, то значение формы $\lambda(v)$ на элементе α будет равно:

$$\lambda_\alpha(v) = \alpha(q_* v),$$

где

$$q_* v \in T_{q(\alpha)}(X)$$

Определение 4.1. *Канонической формой* на кокасательно расслоенном пространстве $T^*(X)$ называется форма λ, определяемая равенством:

$$\lambda_\alpha(v) = \alpha(q_* v)$$

Лемма 4.1. *Пусть X - n-мерное многообразие, η - векторное поле на многообразии X.*
$T^*(X)$ - кокасательно расслоенное пространство над X.
λ - каноническая форма на пространстве $T^*(X)$.
Тогда на пространстве $T^*(X)$ существует и притом единственное векторное поле ς, которое обладает следующими свойствами:
1. $q_* \varsigma = \eta$
2. $L_\varsigma \lambda = 0$

На основании этой леммы, докажем теперь **теорему Нётер**.

Теорема 4.2. *Пусть ξ - гамильтонова система на кокасательном расслоенном пространстве $T^*(X)$, соответствующая замкнутой форме α. Пусть η - векторное поле на многообразии X такое, что, соответствующее ему по лемме, векторное поле ς на пространстве $T^*(X)$ удовлетворяет условию:*

$$\alpha(\varsigma) = 0$$

Тогда функция $\lambda(\varsigma)$ является первым интегралом.

Следствие 4.3. (Классическая гамильтонова механика)
Пусть η - векторное поле на многообразии X^n, ς - соответствующее векторное поле на кокасательно расслоенном пространстве $T^*(X)$ и $H = T - u$ - гамильтониан.
Тогда, если мы векторным полем ς подействуем на функцию H

$$\varsigma H = \varsigma T - \varsigma u$$

где $\varsigma u = \varsigma(u \circ q) = (q_* \varsigma)u = \eta u$
то для того, чтобы в механике имела место теорема Нётер достаточно двух условий:
1) $\varsigma T = 0$
2) $\eta u = 0$

Заключение. В данной работе выполнены поставленные цели и задачи. Мы определили понятия внутреннего и внешнего произведения, понятия дифференцирования, антидифференцирования и дифференцирования Ли дифференциальных форм; рассмотрели симплектическое линейное пространство: основное определение, определение симплектического базиса, малую теорему Дарбу, теорему о базисах в симплектическом пространстве, косоортогональное дополнение и свойства косоортогональных дополнений; также рассмотрели изотропные и лагранжевы подпространства симплектического пространства и основные теоремы; рассмотрели симплектическое многообразие: основные определения и свойства, определение гамильтоновой системы и теорему о гамильтоновой системе, на основе введенных понятий рассмотрели первые интегралы гамильтоновой системы и теорему о первых интегралах. Доказали лемму о связи векторных полей на кокасательно раслоенном протранстве и его базе, на основе этой леммы доказали теорему Нётер; рассмотрели пример движения n тел в поле тяготения и применение теоремы Нётер.

Теорема Нётер дает наиболее простой и универсальный метод получения законов сохранения в классической и квантовой механике, теории поля и т.д. Особенно важное значение имеет теорема Нётер в квантовой теории поля, где законы сохранения, вытекающие из существования определенной группы симметрии, являются часто основным источником информации о свойствах изучаемых объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Полак, Л. С. Вариационные принципы механики / Л. С. Полак. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 600с.

2. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. М.: Наука, 1969. 422с.

3. WolframProgrammingLab [Электронный ресурс] URL: https://lab.open.wolframcloud.com/app/ (дата обращения: 10.05.2017). Загл. с экрана. Яз.англ.

4. Wolfram Language System «Documentation Center» [Электронный ресурс] URL: http://reference.wolfram.com/language/ (дата обращения: 10.05.2017). Загл. с экрана. Яз.англ.

5. Ефимов, Н. В. Введению в теорию внешних форм / Н. В. Ефимов. М.: Наука, 1977. 85с.

6. Годбийон, Г. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / Г. Годбийон. М.: Мир, 1973. 188 с.

7. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. М.: Наука, 1989. 472 с.

8. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков , А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1986. 760с.

9. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия / М. М. Постников. М.: Наука, 1987. 480с.

10. Булдырев, В. С. Линейная алгебра и функции многих переменных / В. С. Булдырев, Б. С. Павлов. М.: Издательство Ленинградского университетe, 1985. 496с.

11. Кокарев, С. С. Элементы геометрии гладких многообразий: производные Ли и их приложения / С. С. Кокарев. РНОЦ Логос (Ярославль).166с.

12. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 512с.

13. Беклемишев, Д. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Д. В. Беклемишев. М.: Высш. шк.,1998. 320с.

14. Макдафф, Д. Введение в симплектическую топологию / Д. Макдафф, Д. Соламон. М.: Ижевск, 2012. 588с.

15. Арнольд, В. И. Симплектическая геометрия / В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. М.: Наука, 1991. 139 с.

16. Фоменко, А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения / А. Т. Фоменко. М.: Изд. МГУ, 1988. 414с.

17. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. М.: Наука, 1974. 331с.

18. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. М.: Наука, 1966.

19. Васильев, В. А. Введение в топологию / В. А. Васильев. М.: ФАЗИС, 1997. 132с.

20. Рохлин, В. А. Начальный курс топологии. Геометрические главы / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. М.: Наука, 1977. 487 с.

21. Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Издательство Московского Университета, 1980. 439с.