Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

# Игры на графах с отношениями предпочтения

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ШВЕЙКИНА АЛЕКСАНДРА СЕРГЕЕВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Математическая теория игр находится на стыке математики и математической кибернетики. Она имеет значительные приложения во многих вопросах теории оптимизации и теории принятия оптимальных решений. Предметом исследования в данной работе являются игры на графах. Игра на графе представляет собой математическую модель многошагового принятия решения несколькими сторонами, преследующими различные цели.

**Цели и задачи.** Цель данной работы – дать дан краткий обзор основных понятий и результатов, относящихся к играм на графах. Привести доказательства некоторых важных теорем, касающихся игр на графах. Рассмотреть модельный пример построения оптимальной стратегии в игре на графе.

**Описание структуры работы.** Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, списка использованных источников, содержащего 20 наименований. Работа содержит 43 страницы и 6 иллюстраций.

**Краткая характеристика материалов работы.** Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. Часть результатов доказана самостоятельно. Рассмотрен модельный пример построения оптимальных стратегий игроков в антагонистической игре на графе с полной информацией.

**Научная новизна и значимость работы.** Научная значимость работы состоит в установлении взаимосвязей между понятиями, относящимися к теории графов, и теоретико-игровыми понятиями.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие результаты: 1. Более подробное, чем в оригинале, доказательство того, что прогрессивно конечный граф обладает ядром (теорема 1.7) 2. Построение модельного примера нахождения оптимальных стратегий игроков в игре на графе (Глава 3.3)

## Основная часть

### Раздел I. Основные понятия теории графов

В первом разделе рассматрены основные определения, доказаны теоремы для конечных графов и для ядра графа, которые далее используются во втором и третьем разделах.

Формально, граф $\gamma$ на множестве $X$ можно определить двумя способами 1) либо как многозначное отображение $X$ в $X$,
2) либо как бинарное отношение $\gamma \subseteq X \times X$.

*Подграфом* графа $(X, \gamma)$ называется граф вида $(A, \gamma_A)$, где $A \subset X$, а многозначное отображение $\gamma_A$ на множестве $A$ определено следующим образом:

$$\gamma_A x = \gamma x \cap A.$$

*Частичным* графом для графа $(X, \gamma)$ называется граф вида $(X, \delta)$, где $\delta x \subseteq \gamma X$ при всех $x \in X$. Частичным подграфом графа $(X, \gamma)$ называется граф вида $(A, \triangle_A)$, где $A \subset X$ и $\triangle_A x \subset \gamma x \cap A$.

*Путь* в графе — последовательность вершин, (конечная или бесконечная), в которой каждая вершина соединена с последующей некоторой дугой, т.е последовательность $\mu$ вида

$$\mu = x_1, x_2, ..., x_k, ..., \text{ где } x_{i+1} \in \gamma x_i \text{ для } i = 1, 2, ....$$

*Контур* – это конечный путь $\mu = x_1, x_2, ..., x_k$, у которого начальная вершина $x_1$ совпадает с конечной $x_k$; при этом контур называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые всегда совпадают). Контур вида $[x, x]$ называется *петлей*.

*Сильно связным* называется граф, где для всех $a, b \in X$ либо существует путь из $a$ в $b$, либо существует путь из $b$ в $a$.

*Ребром* графа $G = (X, \gamma)$ называется множество из двух элементов $\{x_1, x_2\}$, для которых $(x_1, x_2) \in \gamma$ и $(x_2, x_1) \in \gamma$.

*Цепь* в графе $G$ - последовательность вершин $x_1, x_2, ..., x_k, ...$, где $(x_i, x_{i+1}) \in \gamma$ или $(x_{i+1}, x_i) \in \gamma$ для всех $i = 1, 2, ....$

Вершина $z$ называется *мажорантой* множества $B$, если из любой вершины $b \in B$ существует путь в вершину $z$. Это можно записать так:

$$z \overset{\widehat{\gamma}}{\geq} b \text{ для всех } b \in B.$$

Аналогично *минорантой* $B$ называется такая вершина $z$, для которой

$$z \overset{\widehat{\gamma}}{\leq} b \text{ для всех } b \in B.$$

$\widehat{\gamma}$ – это новое бинарное отношение, которое называется *отношением достижимости* в графе $(X, \gamma)$. В конечном графе могут быть бесконечные пути (за счет наличия контуров и петель).

Граф $\gamma$ - *конечен*, если для любой вершины $x$ имеется только конечное число вершин, которые непосредственно следует за вершиной $x$, т.е из каждой вершины исходит лишь конечное число дуг.

Граф называется $\gamma$-ограниченным, если существует такое натуральное число $m$, что $|\gamma x| \leq m$ при всех $x$.

**Теорема 1.** *Для конечных графов (т.е. графов, содержащих конечное число вершин) свойства 'прогрессивно ограниченный', 'прогрессивно конечный' и 'без контуров' равносильны.*

**Теорема 2.** *Если граф $(X, \gamma)$ прогрессивно конечен и $\gamma$-конечен, то*

$$|\widehat{\gamma} x| < \infty \ (x \in X).$$

В 5 пункте рассматриваются порядковые функции.

Функция $o(x)$, определенная, вообще говоря, не на всем $X$, называется порядковой функцией графа.

**Теорема 3.** *Порядковая функция определена на всем множестве $X$ в том и только том случае, если граф $(X, \gamma)$ прогрессивно конечен.*

**Теорема 4.** *Если $S$ - ядро графа $(X, \gamma)$ , то множество $S$ - максимальное в семействе $p$ внутренне устойчивых множеств, т.е.*

$$A \in p,\ A \supset S \Rightarrow A = S.$$

**Теорема 5.** *В симметрическом графе без петель каждое максимальное множество семейства $p$ внутренне устойчивых множеств представляет собой ядро.*

**Теорема 6.** *Для того чтобы множество $S$ было ядром графа $(X, \gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы для характеристической функции $\varphi_S(x)$ множества $S$ выполнялось следующее соотношение:*

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \gamma x} \varphi_S(y)$$

**Теорема 7.** *Прогрессивно конечный граф обладает ядром.*

**Раздел II. Игры на графах**

В данном разделе рассматриваются игры Ним и её примеры.

*Игра Ним* - это игра на графе двух игроков, в которой победителем считается игрок, сделавший последний ход.

Далее доказана теорема о ядре графа.

**Теорема 7.** *Если граф имеет ядро $S$ и один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью. (Ничья считается в случае, когда партия бесконечна).*

Далее рассматриваются игры на графах с функциями выигрыша игроков. Такая игра может быть представлена в виде набора $\langle X, \gamma, \theta, f, g\rangle$, где $(X, \gamma)$ - граф, $\theta$ - функция очередности ходов, $f, g$ - функции выигрыша игроков 1 и 2.

В игре $(X, \gamma, \theta, f, g)$ стратегия игрока $(1)$ есть, по определению, такое однозначное отображение $\sigma^1$ множества $X_1$ в $X$, что

$$\sigma^1 x \in \gamma x, \text{ для всех } (x \in X_1).$$

Аналогично стратегия игрока $(2)$ есть, по определению, такое однозначное отображение $\sigma^2$ множества $X_2$ в $X$, что

$$\sigma^2 x \in \gamma x, \text{ для всех } (x \in X_2).$$

*Пара* $(\sigma_0, \tau_0)$ *стратегий* игроков $(1)$ и $(2)$, по определению, есть ситуация равновесия (в позиции $x$), если

$$f(x; \sigma, \tau_0) \leq f(x; \sigma_0, \tau_0) \ (\sigma \in \textstyle\sum_1)$$
$$g(x; \sigma_0, \tau) \leq g(x; \sigma_0, \tau_0) \ (\tau \in \textstyle\sum_2)$$

Пара стратегий игроков $(\sigma_0, \tau_0)$, являющаяся равновесием для любой позиции $x$, называется *абсолютным равновесием игры*.

*Партия* - это последовательность позиций $x_0, x_1, ...x_n$, в которой $x_{i+1} \in \gamma$; $x_0$ - начальная позиция, $x_n$ - конечная позиция.

Пара стратегий игроков $(\sigma_0, \tau_0)$, являющаяся равновесием для любой позиции $x$, называется *абсолютным равновесием игры*.

**Теорема 8.** *Если граф имеет ядро $S$ и один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью. (Ничья считается в случае, когда партия бесконечна).*

**Теорема 9. (Теорема Цермело-Фон- Неймана.)** *Если граф $(X, \gamma)$ некоторой игры прогрессивно конечен, а множества $f(X) = \{f(x)/x \in X\}$ и $g(X) = \{g(x)/x \in X\}$ конечны, то игра допускает абсолютное равновесие $(\sigma_0, \tau_0)$.*

**Раздел III. Достижимость в позиционных графах**

Под графом на множестве $A$ понимается всякое однородное бинарное отношение $\gamma \subset AxA$. Последовательность $l = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ называется путь в графе, если для каждого $k = 0, 1, ...(a_k, a_{k+1}) \in \gamma$; $a_0$ называется ее начальным элементом.

**Теорема 11.** *Предположим, что граф $(A, \gamma)$ прогрессивно ограничен в каждой вершине. Тогда в любой фиксированной позиции достижимость каждого подмножества либо гарантируется некоторой стратегий игрока 1, либо запрещается некоторой стратегией игрока 2.*

В каждой позиции $a_0$ достижимость семейства $\{X\}$, состоящего из единственного подмножества $X$, гарантируется (некоторой 1-стратегией) тогда и только тогда, когда гарантируется достижимость подмножества $X$ (некоторой обобщенной 1-стратегией); и запрещается (некоторой 2-стратегией) тогда и только тогда, когда запрещается достижимость подмножества $X$ некоторой обобщенной 2-стратегией.

Для каждого конечного семейства $\{X_1, ..., X_n\}$ подмножеств множества $A$ индукцией по $n$ определим подмножество $[X_1, ..., X_n]$ множества $A$ следующим образом:

$$[X_1] = X_1, [X_1, ..., X_n] = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \cap \Gamma([X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n]).$$

**Теорема 12.** *В каждой позиции $a_0$ достижимость семейства подмножеств $\{X_1, ..., X_n\}$ гарантируется тогда и только тогда, когда гарантируется достижимость подмножества $[X_1, ..., X_n]$, и запрещается тогда и только тогда, когда запрещается достижимость подмножества $[X_1, ..., X_n]$.*

**Теорема 13** *Для каждого конечного семейства подмножеств его достижимость в заданной позиции либо гарантируется обобщенной стратегией игрока 1, либо запрещается обобщенной стратегией игро-*

*ка 2*.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной задачей теории игр является доказательство условий существования оптимальных стратегий и построение алгоритмов нахождения оптимальных стратегий.

В данной работе эти задачи решаются для игр с полной информацией на графах. Рассмотрены основные типы игр на графах: игры Ним, игры с функциями выигрыша игроков, игры на достижимость подмножеств и семейств подмножеств в позиционных графах.

Доказаны теоремы о существовании оптимальных стратегий для игр этого класса. Приведен модельный пример построения оптимальных стратегий игроков в игре на достижимость подмножества окончательных позиций в графе.