Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Нормальные алгоритмы Маркова и алгоритмически вычислимые функции

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления (специальности)

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ГВОЗДЕВА ВАДИМА АЛЕКСЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. ГАЛАЕВ
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доктор ф.-м. н., профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Для изучения многих вопросов математической логики и оснований математики требуется знание, по крайней мере, первоначальных сведений из теории алгоритмов. В выпускной работе изложены три формализации понятия алгоритма — машины Тьюринга, рекурсивные функции и нормальные алгоритмы Маркова, доказана их эквивалентность. Рассмотрены основные теоремы общей теории алгоритмов, теория разрешимых и перечислимых множеств, алгоритмически неразрешимые массовые проблемы, теория сложности вычислений и массовых проблем, алгоритмические проблемы математической логики и других разделов математики. Охарактеризованы взаимосвязи теории алгоритмов с компьютерами и информатикой. Конкретные алгоритмы в математике и практике известны давно. Развитие математики и математической логики, а также осознание важности использования этих наук в информатике, вызвали к жизни и заставили развиться в 30-60-ые годы прошлого века общую науку об алгоритмах - теорию алгоритмов. В теории алгоритмов объектом исследования стало именно понятие алгоритма как таковое и его самые общие свойства. В основе этой теории лежат идеи голландского математика Л.Э.Я.Брауэра и немецкого математика Г.Вейля, высказанные ими в 20-ые годы XX в., в которых они обратили внимание на различие между конструктивными и неконструктивными доказательствами в математике. Рассуждая конструктивно при доказательстве существования какого-либо объекта с заданными свойствами, математик указывает способ (алгоритм) его получения. В отличие от этого, неконструктивное доказательство, или, как говорят, доказательство чистого существования не позволяет явно построить такой объект; оно лишь устанавливает логическое противоречие, если предположить, что такого объекта не существует. Сначала были выработаны несколько формализаций до того лишь интуитивно осознаваемого понятия алгоритма – машины Тьюринга, рекурсивные функции, алгоритмы Маркова, - доказана их эквивалентность и сформулирован знаменитый тезис Чёрча. Это позволило строго доказать алгоритмическую неразрешимость большого количества массовых проблем и начать развивать общую (или абстрактную) теорию алгоритмов, в которой конкретный формализм отошёл на второй план, а главными понятиями, по существу, снова стали интуитивно понимаемые понятия алгоритма и вычислимой функции.

Основная часть

Раздел I. Неформальные представления об алгоритмах и необходимость уточнения понятия алгоритма

В первом разделе рассматриваются основные определения, свойства и теоремы, которые далее используются во втором разделе.

Понятие алгоритма стихийно формировалось с древнейших времён. Современный человек понимает под алгоритмом чёткую систему инструкций о выполнении в определённом порядке некоторых действий для решения всех задач какого-то данного класса.

Под алгоритмом понимается чёткая система инструкций, определяющая дискретный детерминированный процесс, ведущий от варьируемых начальных данных (входов) к искомому результату (выходу), если таковой существует, через конечное число тактов работы алгоритма.

Для любого алгоритма характерны следующие свойства:

1) Детерминированность алгоритма. Описываемый метод должен быть общедоступен и настолько точно описан, что не остается место произволу. Его можно сообщить другому лицу в виде конечного списка указаний о том, как надлежит поступить в любой возникшей ситуации. При этом система величин, получаемых в данный момент времени, однозначно определяется величинами, полученными в предшествующие моменты, и эта однозначность не зависит от произвола действующего лица, а также от того, кто его выполняет.

2) Массовость алгоритма. Алгоритм служит для решения целой серии (в принципе бесконечной) однотипных задач.

3) Дискретность алгоритма. Алгоритмический процесс происходит дискретно во времени, начало которого задается конечной системой величин, полученных в предыдущих шагах.

4) Направленность (результативность) алгоритма. Алгоритмический процесс, будучи применен к любой задаче заданного типа, должен

завершиться через конечное число шагов и выдать результат.

5) Элементарность шагов (доступность) алгоритма. Система указаний должна состоять из команд настолько простых и элементарных, что процесс вычислений можно было бы поручить и машине.

Пусть имеется некоторый алфавит, где S множество всех слов в данном алфавите, а M подмножество множества S.

Определение – Множество M называется разрешимым, если для него существует алгоритм, решающий проблему вхождения слова x в M.

Определение – Множество M называется эффективно перечислимым, если существует алгоритм, позволяющий перечислить все элементы этого множества (возможно с повторениями).

Теорема 1. *Если множества M и L эффективно перечислимы, то эффективно перечислимы множества $M \cup L$ и $M \cap L$.*

Теорема 2. *(Поста). Множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение эффективно перечислимы.*

Определение – Функция называется эффективно вычислимой, если существует алгоритм, позволяющий вычислить ее значения.

Определение – Функция $f(x1, x2, \ldots, x_n)$ называется частично рекурсивной, если она может быть получена за конечное число шагов из простейших функций при помощи операций суперпозиции, схем примитивной рекурсии и μ-оператора.

Определение – Функция $f(x1, x2, \ldots, x_n)$ называется общерекурсивной, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Раздел II. Нормальные алгоритмы А.А. Маркова и нормально вычислимые функции

В данном разделе мы рассматриваем способ уточнения понятия алгоритма предложенный А.А. Марковым основанный на понятии нормального алгоритма.

Пусть задан алфавит A и система подстановок B. Для произвольного слова P подстановки из B подбираются в том же порядке, в каком они следуют в B. Если подходящей подстановки нет, то процесс останавливается. В противном случае берется первая из подходящих подстановок и производится замена ее правой частью первого вхождения ее левой части в P. Затем все действия повторяются для получившегося слова P_1. Если применяется последняя подстановка из системы B, процесс останавливается. Такой набор предписаний вместе с алфавитом A и набором подстановок B определяют нормальный алгоритм. Процесс останавливается только в двух случаях:

1) когда подходящая подстановка не найдена;

2) когда применена последняя подстановка из их набора.

Различные нормальные алгоритмы отличаются друг от друга алфавитами и системами подстановок.

Определение – рекурсией называется способ задания функции, при котором значение функции при определенном значении аргументов выражается через уже заданные значения функции при других значениях аргументов.

Теорема 3. *Частичная функция f из $(N)^m$ в $(N)^n$ называется вычислимой, если можно указать такой алгоритм («программу»), который для входного набора $x \subset (N)^m$ дает на выходе $f(x)$, если $\subset D(f)$ и нуль, если $\subset D(f)$.*

Определение – Частичная функция f называется невычислимой, если она не является ни вычислимой, ни полувычислимой.

Определение – последовательность частичных функций $f_i, ..., f_n$ называют частично рекурсивным (соответственно примитивно рекурсивным) описанием функции $f_n = f$, если f_i - одна из простейших функций; f_i для всех $i \geq 2$ либо является простейшей функцией, либо получается применением одной из элементарных операций к некоторым из функций $f_i, ..., f_{i-1}$ (соответственно одной из элементарных операций, кроме m).

Определение – функция f называется частично рекурсивной (соответственно примитивно рекурсивной), если она допускает частично рекурсивное (соответственно примитивно рекурсивное) описание.

Определение – функция f полувычислима, если и только если она частично рекурсивна.

Определение – функция f вычислима, если и только если рекурсивны f и характеристическая функция $X_{D(f)}$.

Определение – Массовая проблема называется алгоритмически разрешимой, если функции f и $X_{D(f)}$ частично рекурсивны. В противном случае называется алгоритмически неразрешимой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На результаты, полученные при решении проблемы разрешимости различных математических теорий, можно посмотреть с точки зрения программы Гильберта обоснования математики. Идея Гильберта состояла в том, чтобы записать (закодировать) на формальном логико-математическом языке все математические утверждения, выделить в различных разделах математики системы аксиом, которые также записать на формальном логико-математическом языке, а затем, используя правила вывода формальной логики, выводить из этих формул-аксиом формулы-теоремы. Гильберт надеялся, что такая формализация превратит доказательство математических результатов в механическую игру с цепочками символов. Кроме того, этот метод позволил бы дать исчерпывающий список всех формальных теорем любой математической теории, а это помогло бы доказать, что в этой теории не существует никакого формального утверждения и его отрицания, которые могут быть доказаны вместе, что в свою очередь, демонстрировало бы непротиворечивость математики. В программу Гильберта была включена и вера в то, что процесс вывода теорем может быть механизирован, или, говоря по-современному, что математические теории разрешимы. К.Гёдель продемонстрировал невозможность доказательства непротиворечивости любой значительной части математики посредством финитных методов, которые отстаивал Гильберт, а А.Чёрч доказал, что исчисление предикатов, как и арифметика сложения и умножения натуральных чисел, неразрешимы. Эти результаты открыли перспективу изучения проблемы разрешимости и вызвали массу исследований о разрешимости и неразрешимости различных математических теорий, о некоторых из которых говорилось в настоящей работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Айзерман М.А., Гусев Л.А., и др. Логика, автоматы, алгоритмы. ФизМатГиз. М., 1963, 320 стр.

2 Львовский, С.М. Набор и вёрстка в системе LATEX. 3-е изд., 2003, 448 стр.

3 Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. Мир. М.,1976, 560 стр.

4 Воротников С. М. Основы теории алгоритмов и рекурсивных функций. - Комсомольск-на Амуре: Комс.-на Амуре гос. техн. ун-т, 2007, 121 с.

5 Глухов М.М., Козлитин О.А., Шапошников В.А.У Шишков А.Б. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов. - СПб и др.: Лань, 2008, 112 с.

6 Ершов Ю.Л., Лавров И.А., и др. Элементарные теории. Успехи математических наук.XX. вып.4(124) стр 37-108.

7 Захаров Д.А. Рекурсивные функции. Новосибир.Г.У. Новоси-бирск, 1970, 192 стр.

8 Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Издательский центр ”Академия”, 2004, 2008, 2010, 448 с.

9 ПКлини С. Математическая логика.Мир.М.,1973, 509 стр.

10 Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Наука. М., 1965, 608 стр.

11 Марков А.А. Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. Наука. М., 1984.

12 Математическая энциклопедия. т.1,М.,1977, 384с.

13 Набедин А.А., Кораблёв Ю.П. Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Научный мир, 2008, 344 с.

14 Поляков Е.А., Розинас М.Г. Теория алгоритмов. Издательство Ивановский Г.У., Иваново,1976, 465 стр.

15 Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Мир. М.,1972, 117 стр.

16 Трахтенборт Б.А. Алгоритмы и машинное решение задач. Гостехиздат. М.,1957, 63 стр.
17 Толковый словарь математических терминов. Просвещение. М.,1965, 275 стр.
18 Успенский В.А. Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз. М.,1960, 43 стр.
19 Шенфильд Дж. Степени неразрешимости. Наука. М.,1977, 382 стр.
20 Эббинхауз Г.Д., Якобс К. и др. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. Мир. М.,1972, 573 стр.