

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра оптики и биофотоники

**СЛОЖНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ
СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ СВЕТОВОДАХ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В БИОМЕДИЦИНСКИХ ТЕХНОЛОГИЯХ.**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 434 группы направления 03.03.02 «Физика» профиль
«Физика живых систем» физического факультета
Арбузова Евгения Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м.н.

_____ Г.Г. Акчурин

Консультант, ведущий инженер
Кафедры теоретической физики СНИГУ

_____ Мысенко М.Б.

Заведующий кафедрой оптики и биофотоники
профессор, д.ф.-м.н

_____ Тучин В.В.

Саратов 2016 год

Содержание

Введение	3
1. Солитоны и методы математического моделирования их динамики	6
2. Солитонные и солитоноподобные динамические системы	9
3. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)	11
4. Динамика солитона НУШ	12
5. Моделирование хаотичной динамики солитонов НУШ во внешних полях	14
6. Нерегулярная динамика солитонов НУШ в термостате	20
Заключение	24
Список литературы	25
Приложение. Метод обратной задачи рассеяния.	28

Введение

В современной биомедицинской оптической технологии разрабатываются две технологии зондирования биотканей *in vivo* и *in vitro*. Один подход использует когерентные свойства лазерного и светодиодного излучения в непрерывном режиме. Начиная с 2001 года на медицинском офтальмологическом рынке появились оптические низко-когерентные томографы (ОСТ) [1]. В настоящее время пространственное разрешение по глубине зондируемого слоя биоткани достигает 3-х микрон, при этом реализован режим 3D сканирования. Пространственное разрешение в лазерных конфокальных томографах может достигать менее микрона, однако только в слабо рассеивающих биосредах. Идея конфокальности была реализована в 3D флуоресцентных или рамановских томографах (на основе анализа комбинационного рассеяния биотканей) измеряемые из объема когерентности, существенно меньшего, чем размер клетки.

Для диагностики глубоко расположенных биотканей используется импульсное лазерное зондирование. При лазерном нано-, пико- или фемто-секундном зондировании исследуется изменение формы и длительности импульсов. Это так называемые оптические диффузионные томографы. Такие методы зондирования используются для измерения дисперсии в оптических волокнах и определения скорости передачи цифровой информации. Традиционно такие же оптические кварцевые световоды, обычно одномодовые (диаметр центральной жилы 4-10 микрон) используются в оптических томографах. При этом в импульсном режиме при длительностях менее одной наносекунды могут возникнуть нелинейные явления типа самофокусировки, генерации суперконтинуума, возбуждение солитонов [2]. В реальных оптических схемах возможно нелинейное взаимодействие двух оптических импульсов, например, в интерферометре Майкельсона при измерении длительности пико- и фемто-секундных лазерных импульсов на основе исследования корреляционных функций. Сложные динамические режимы могут возникать при

распространении сверхкоротких оптических импульсов при возбуждении широкополосной флуоресценции.

По этой причине целями выпускной квалификационной работы были:

1. Математическое моделирование хаотичности солитонов нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в слабых внешних оптических полях, возникающих в нелинейных световодах, используемых в биомедицинских технологиях и датчиках;

2. Исследование причин, вызывающих стохатизацию динамики солитона НУШ, возникающей при распространении сверхкоротких импульсов в нелинейном оптическом волокне при воздействии дополнительного оптического излучения с разной шириной спектра.

Солитоны представляют собой импульсообразные автомодельные решения существенно нелинейных волновых уравнений в различных математических моделях и могут наблюдаться в оптических световодах вследствие керровской нелинейности. Они называются солитоном лишь в том случае, если единственным результатом их взаимодействия друг с другом является фазовый сдвиг.

Солитоны в световодах наблюдаются когда керровская самофокусировка компенсируется эффектами дифракции. возможны либо в линейных бездисперсных и бездиссипативных системах, либо в нелинейных дисперсных, либо в нелинейных диссипативных системах. Дисперсия, как и диссипация, стабилизирует волну от укрупнения ее нелинейностью, т.е. предотвращает формирование ударной волны.

Солитоны [3,4] находят многочисленные приложения к решению нелинейных проблем в различных областях физики и техники. Растет количество публикаций по экспериментальному подтверждению существования солитонов, особенно в физике конденсированного состояния [5]. Применительно к физике высоких энергий солитонные модели элементарных частиц [6] минимизируют число необходимых фундаментальных полей и позволяют именно здесь, по-видимому, наиболее последовательно реализовать возможности не-

линейной динамики. При математическом моделировании существенно нелинейных систем солитоны играют ту же роль, что и квазичастицы в случае слабо нелинейных систем.

Солитоны в пространственно-одномерном случае имеют вид $\Phi(x, t) = \Phi(\xi)$, где $\xi = x - u \cdot t$, u – скорость солитона. Причем $\Phi(\xi)$ подчиняется обыкновенному по ξ дифференциальному уравнению, имеет характер уединенной волны (т.е. переход от асимптотики $\Phi(\xi \rightarrow -\infty)$ к асимптотике $\Phi(\xi \rightarrow +\infty)$) практически полностью локализован в точке ξ) и называется солитоном лишь в том случае, если единственным результатом взаимодействия солитонов друг с другом является фазовый сдвиг. То есть, если при больших отрицательных значениях времени $t \rightarrow -\infty$ имеется волна из N уединенных волн

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^N \Phi(\xi_i), \xi_i = x - u_i t, \quad (1)$$

то в случае солитонов при $t \rightarrow +\infty$ эта волна будет иметь вид

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^N \Phi(\xi_i), \xi_i = x - u_i t + \delta_i, \delta_i = const, \quad (2)$$

Заметим кроме того, что максимум $\Phi(x, t)$ в момент столкновения солитонов меньше амплитуды большего из солитонов, что указывает на отсутствие здесь линейной суперпозиции.

Солитоны возможны либо в линейных бездисперсных и бездиссипативных системах, либо в нелинейных дисперсных, либо в нелинейных диссипативных системах. Дисперсия, как и диссипация, стабилизирует волну от укрупнения ее нелинейностью, т.е. предотвращает формирование ударной волны. Подчеркнем, что большинство нелинейных волновых уравнений, обладающих решениями в виде уединенных волн, не имеют решений, ведущих себя как солитоны в строгом смысле. Чаше уединенные волны являются лишь солитоноподобными, т.е. после столкновения их профиль хоть немного, но изменяется, часть энергии теряется (излучается) в виде последующих колебаний. Уравнениями, имеющими солитонные решения, моделируются вполне интегрируемые динамические системы, обладающие бесконечным

числом интегралов движения. Последнее связано с бесконечномерностью фазового пространства распределенной динамической системы.

Использование солитонных моделей в различных областях физики предполагает детальное математическое моделирование свойств отдельных солитонов, проявляющихся при их взаимодействии с внешними полями и друг с другом. А также находят применение статистические свойства ансамбля (газа) солитонов [7] и динамика отдельных или небольшого числа солитонов. Солитонные уравнения без возмущений являются идеализацией. Их “деформация” взаимодействием солитонов друг с другом и с внешними полями может привести к хаотичной динамике солитонов, являющейся причиной развала солитонов [8] и потери энергии солитонами на излучение [9]. Все эти результаты важны для моделирования турбулентности нелинейных дисперсных волн, статистики солитонов и т.д., а также при решении прикладных задач, в частности, при математическом моделировании процессов в ВОЛС и в джозефсоновских переходах.

Задачей данной выпускной квалификационной работы является математическое моделирование хаотичности солитонов нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в слабых ($\sim \epsilon$) внешних полях в адиабатической модели, а также исследование на стохатизацию динамики солитона НУШ.

1. Солитоны и методы математического моделирования их динамики

Основная масса результатов при описании нелинейных процессов на основе солитонных моделей в настоящее время получена путем применения идеализированных вполне интегрируемых моделей. Пока только такие модели поддаются строгому аналитическому исследованию. Наиболее эффективным здесь является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Актуальным является выход за рамки идеализированных моделей. Первым шагом на этом пути является переход к математическому моделированию почти интегрируемых систем, динамику которых можно описать уравнениями, сводящимися к различного рода возмущениям исходных, вполне интегрируемых нелинейных волновых уравнений. К исследованиям такого рода относятся проблемы учета взаимодействия различных физических полей с солитонами, влияния дефектов, термостата и т.д. При этом диссипативные возмущения приводят к затуханию солитонов. В случае же консервативных возмущений солитон в линейном (адиабатическом) приближении ($\sim \epsilon$) обычно устойчив, сохраняет свою форму. Однако столкновения таких солитонов друг с другом уже не являются упругими и сопровождаются излучением энергии с интенсивностью $\sim \epsilon$ [10]. В результате возможно слияние солитонов в связанное состояние – бион, а солитона и антисолитона – в бризер с последующей его аннигиляцией [11]. Кроме того, взаимодействие трех (и более) таких солитонов порождает, как правило, уже в адиабатической модели трехчастичные эффекты – перераспределение энергии и импульса между более чем двумя сталкивающимися солитонами, а также многочастичные вклады в фазовые сдвиги.

Для таких систем на основе МОЗР развита адекватная теория возмущений, а также постоянно совершенствуются методы вычислительного эксперимента, который является практически единственным средством моделиро-

вания эргодических (неинтегрируемых) систем, особенно в многомерном случае [12].

Применение численных методов требует дискретизации исходной непрерывной задачи. Здесь главной трудностью является исследование сходимости применяемого метода. Однозначного подхода для анализа численного метода на сходимость в случае нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных не существует, зачастую приходится довольствоваться изучением сходимости для линейризованного варианта этих уравнений.

Перспективной методикой математического моделирования динамики распределенных (полевых) систем и, в частности, солитонов является их фазовая трактовка [13]. При этом появляется возможность рассматривать распределенные системы с помощью хорошо разработанных методов анализа динамики сосредоточенных систем. Разница между этими двумя типами систем сводится лишь к тому, что в первом случае фазовое пространство бесконечномерно, а во втором – конечной размерности. Указанный анализ распределенных систем реализуется разложением их “волновой функции” $\Phi(x,t)$ по базису из стоячих волн $\varphi_i(x)$ (метод Галеркина):

$$\Phi(x,t) = \sum_{i=1}^N X_i(t) \varphi_i(x). \quad (1)$$

При этом удовлетворительная точность описания динамики полевой системы достигается, если в разложении (1) сохранить $N \approx 10$ первых слагаемых [14,8,15, 16]. Отметим, что достаточно надежного теоретического обоснования определяющей роли числа N гармоник для сильно нелинейных систем не существует. Но, по-видимому, число весомых гармоник тем больше, чем меньше радиус пространственной корреляции, чем ярче выражена пространственная хаотизация динамики системы. Например, в случае ламинарных течений число гармоник намного меньше, чем при развитой турбулентности. Отметим также работы [17-20], в которых качественными методами делаются попытки моделирования распределенных динамических систем на основе разложения (1) в бесконечномерном фазовом пространстве ($N=\infty$).

2 Солитонные и солитоноподобные динамические системы

Рассмотрим примеры математических моделей на основе дисперсионных нелинейных волновых уравнений, имеющих солитонные решения, а также уравнений, не имеющих солитонных решений в строгом смысле, но обладающих солитоноподобными решениями в виде уединенных волн.

К первой группе волновых уравнений относится уравнение синус-Гордона, а также:

-- уравнение Кортевега де Вриза (КдВ)

$$\Phi_t + \alpha \Phi^p \Phi_x + \Phi_x^{2r+1} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha = \text{const}$, p и r – неотрицательные целые числа. Это уравнение имеет решения в виде уединенных волн при $r = 0$ и 1 . И применялось сначала для математического моделирования волн на мелкой воде в отсутствии диссипации, затем для моделирования многих других процессов (ионноакустические и магнитогидродинамические волны в плазме, волны в ангармонической решетке, термовозбуждение фононных пакетов в нелинейных кристаллах при низкой температуре и т.д.). Простейшее обобщение этого уравнения – модифицированное уравнение КдВ

$$\Phi_t + \alpha \Phi^2 \Phi_x + \Phi_{xxx} = 0, \quad (3)$$

применяемое для математического моделирования волн в некоторых ангармонических решетках и др., также имеет солитонные решения

-- нелинейное уравнение Шредингера

$$i \Phi_t + \Phi_{xx} + 2 |\Phi|^2 \Phi = 0 \quad (4)$$

Кроме широко известных приложений в физике плазмы и нелинейной оптике это уравнение применяется также для математического моделирования волн на глубокой воде, волн плотности в спиральных галактиках и одномерных спиновых системах. А также в теории экситонов в молекулярных цепочках [21] и для моделирования динамики термоимпульсов в твердом теле.

3 Нелинейное уравнение Шредингера

Рассмотрим хаотичность солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера. Основная масса результатов при описании нелинейных процессов на основе солитонных моделей в настоящее время получена путем применения идеализированных вполне интегрируемых моделей. Только такие модели поддаются строгому аналитическому исследованию. Наиболее эффективным является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), представляющий собой групповое (L, A) - преобразование нелинейной задачи к линейной (нелинейное обобщение метода преобразования Фурье, нелокальную линеаризацию исходного нелинейного волнового уравнения [22]). Принципиальной трудностью здесь является то, что (L, A) - пару линейных операторов приходится просто угадывать.

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\Phi_t + \Phi_{xx} + 2|\Phi|^2\Phi = 0 \quad (5)$$

является нерелятивистским пределом уравнения Клейна - Гордона с самодействием и применяется в различных областях физики. Для уравнения (5) (L, A) -пара операторов МОЗР имеет вид [23]

$$L = iP\frac{\partial}{\partial x} + Q(\Phi), A = MD + C(\Phi) \quad (6)$$

здесь $P = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ -\Phi & 0 \end{pmatrix}$, $D = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, причем $C(\Phi) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$ и

уравнение (5) представляется соответствующим линейным уравнением

$$i\frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] = 0. \quad (7)$$

Возмущенное уравнение НУШ имеет вид [5] ($\epsilon \ll 1$)

$$i\Phi_t + \Phi_{xx} + 2|\Phi|^2\Phi = i\epsilon R(\Phi, x, t) \quad (8)$$

и описывает параметрическое воздействие на солитон со стороны неоднородной среды, если $R = a(x) \cdot b(t) \cdot \Phi$. Это имеет место при изменении показателя преломления среды в которой распространяется возмущение, например

средствами акустоэлектроники, или при пересечении солитоном границы раздела двух сред. В последнем случае возникает переходное излучение солитоном энергии, что во многом напоминает переходное излучение заряженной частицы.

Динамика солитона НУШ в полигармоническом поле описывается уравнением (8), если $R = \sum_n A_n \exp(i\omega_n t)$.

Потери энергии солитоном учитываются в случае $R = \Gamma \cdot \Phi$. Результаты численного моделирования процесса распространения солитонов НУШ в волоконно-оптических линиях связи (ВОЛС) с учетом диссипации приведены в работе [24]. Анализ спектральных и временных характеристик односолитонных импульсов в волоконно-оптических линиях связи при $\Gamma \neq 0$ показывает, что по мере движения солитона из-за диссипации его энергии появляется частотная модуляция, которая изменяется вдоль трассы ВОЛС, постепенно начинает доминировать модуляция, обусловленная дисперсией групповой скорости. При этом нелинейность не успевает компенсировать дисперсионный набег фазы и появляется ограничение на минимальную длительность импульсов в ВОЛС, а значит и ограничение на пропускную способность ВОЛС (при $\tau \approx 8$ пс скорость передачи информации $\leq 10^{11}$ бит/сек).

4 Динамика солитона НУШ.

Динамика солитона НУШ (8) на языке (L, A) - операторов описывается уравнением

$$i \frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] = i \varepsilon \hat{R}(\Phi) \quad (9)$$

где $\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & R(\Phi) \\ -R(\Phi) & 0 \end{pmatrix}$.

Для нахождения уравнений эволюции параметров η , ξ , μ , δ солитона НУШ в адиабатическом приближении

$$\Phi(x, t) = 2\eta(t) \operatorname{sech} Z \exp(i(\frac{\mu(t)}{\eta(t)} Z + \delta(t))), \quad Z = 2\eta(t)(x - \xi(t)) \quad (10)$$

решается соответствующая линейная задача на собственные значения

$$\hat{L}\Phi(x, t) = \lambda(t) \cdot \Phi(x, t) \quad (11)$$

Оказывается, что дискретный спектр (11) состоит всего лишь из одного "уровня" $\lambda = \mu + i\eta$. В этом случае функции Иоста уравнения (11)

$$F(x, \lambda) = \frac{\exp(i\lambda(Z/2\eta + \xi(t)))}{\lambda - \mu + i\eta} \begin{pmatrix} \eta \operatorname{sech} Z \exp(-i(\mu Z/\eta + \delta)) \\ \lambda - \mu + i\eta \operatorname{th} Z \end{pmatrix},$$

$$G(x, \lambda) = a(\lambda) \cdot F(x, \lambda) \quad (12)$$

где: $a(\lambda) = \frac{\lambda - \mu - i\eta}{\lambda - \mu + i\eta}$ связаны соотношением $G(x, \lambda) = i \cdot e^{i(\delta - 2\lambda\xi)} F(x, \lambda)$, причем

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{(\bar{\Phi}, \hat{R}\Phi)}{(\bar{\Phi}, \Phi)}.$$

Далее, решая интегральное уравнение Гельфанда - Левитана:

$$K_1(x, y, t) = H^*(x + y, t) - \int_x^\infty K_1(x, y'', t) \int_x^\infty H^*(y + y', t) H(y' + y'', t) dy' dy'', \quad (13)$$

где $H(x, t) = \frac{e^{i(\delta - 2\lambda\xi + \lambda x)}}{a(\lambda)}$, и учитывая, что $\Phi(x, t) = -2iK_1^*(x, x, t)$, получают следующие уравнения эволюции параметров солитона НУШ (здесь $\theta = \frac{\mu x}{\eta} + \delta$):

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} h(z) R(\Phi(z)) e^{i\theta} dz, \\
\frac{d\xi}{dt} &= -4\mu + \frac{\varepsilon}{4\eta^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{ch(z)} R(\Phi(z)) e^{i\theta} dz, \\
\frac{d\delta}{dt} &= 2\mu \frac{d\xi}{dt} + 4(\mu^2 - \eta^2) - \frac{\varepsilon}{2\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - zth(z)}{ch(z)} R(\Phi(z)) e^{i\theta} dz, \\
\frac{d\mu}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{th(z)}{ch(z)} R(\Phi(z)) e^{i\theta} dz.
\end{aligned} \tag{14}$$

Система уравнений (14) позволяет описать динамику бесконечномерных солитонных систем конечным числом динамических переменных.

В следующем после адиабатического приближения МОЗР позволяет описать искажение формы солитона [25]. При этом первоначально неискаженный солитон КдВ под действием возмущения превращается в образование состоящее из слабodeформированного солитона (солитонного ядра) и "хвоста" - волнового пакета малой амплитуды, следующего за солитоном. В случае же солитона НУШ "хвост" не образуется, и солитон лишь самоподобно (адиабатически) изменяется с небольшой деформацией.

5 Моделирование хаотичной динамики солитонов НУШ во внешних полях.

Рассмотрим [26] в адиабатической модели динамику солитона НУШ (8) в однородном внешнем поле $R(\Phi) = A \cdot \sin(\omega t)$. В этом случае уравнения движения (14) принимают вид ($\Omega = \pi\mu/2\eta$):

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \varepsilon \frac{\pi}{2} R \cos \delta \sec h\Omega, & \frac{d\xi}{dt} &= -4\mu - \varepsilon \frac{\pi^2}{8\eta^2} R \sin \delta \sec h\Omega \tanh\Omega, \\ \frac{d\mu}{dt} &= -\varepsilon \Omega R \cos \delta \sec h\Omega, & \frac{d\delta}{dt} &= -4(\mu^2 + \eta^2) - \varepsilon \frac{\pi}{\eta} \Omega R \sin \delta \sec h\Omega \tanh\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) позволяет промоделировать зависимость динамики солитона НУШ от амплитуды и частоты внешнего поля (A, ω), от начальных значений параметров самого солитона, в частности от его скорости ($\sim \mu$). Приведенные ниже результаты численного решения выполнены в относительных единицах при $\varepsilon = 0.01$ и начальных условиях $\eta_0 = 1, \xi_0 = \delta_0 = 0$.

На рис.1 показано влияние величины амплитуды внешнего поля на эволюцию соответственно амплитуды ($\sim \eta$) и скорости солитона. Видно, что с ростом амплитуды внешнего поля зависимость амплитуды и скорости солитона от времени усложняется. Колебания $\eta(t)$ и $\mu(t)$ противофазны в соответствии с соотношением

$$\eta \frac{d\mu}{dt} = -\mu \frac{d\eta}{dt}, \quad (16)$$

следующим из уравнений (15). Отметим еще раз, что при дальнейшем увеличении амплитуды A внешнего поля, когда становится неприменимым адиабатическое приближение, солитон покрывается «рябью» и затем распадается на два солитона [8].

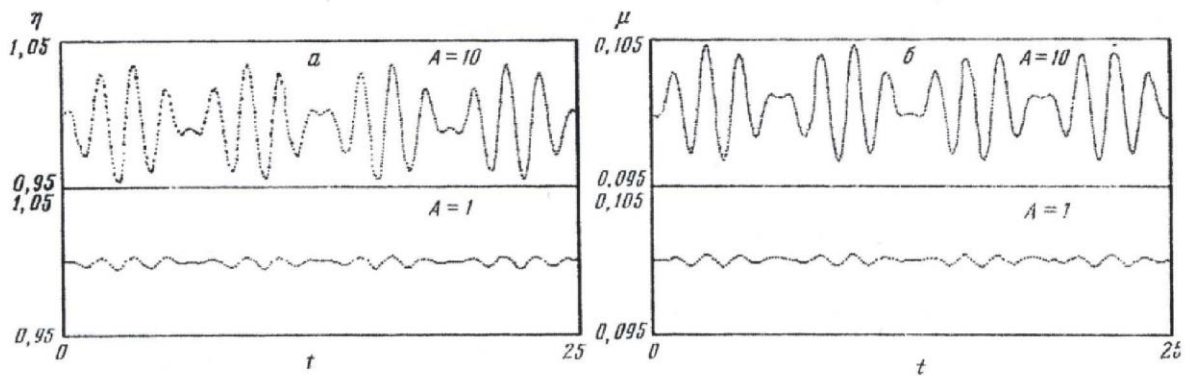


Рис.1. Зависимость амплитуды (а) и скорости (б) солитона НУШ от времени ($\omega=0.5$, $\mu_0=0.1$).

На рис.2 показано влияние величины начальной скорости солитона на эволюцию его амплитуды. С увеличением μ_0 зависимость $\eta(t)$ становится более регулярной – имеет место повышение устойчивости солитона при увеличении его скорости, что согласуется с результатами анализа условий положительной определенности функционала энергии солитона [27] и численного моделирования столкновений солитонов НУШ [12].

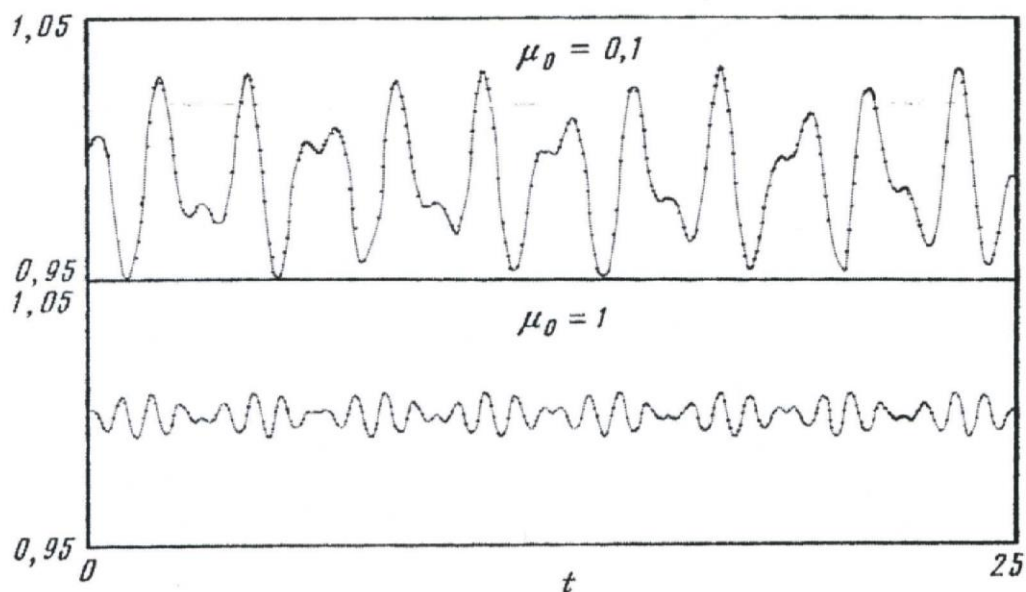


Рис. 2. Влияние начальной скорости солитона НУШ на эволюцию его амплитуды ($A=10$, $\omega=1$)

Этот вывод подкрепляется (μ, δ) -диаграммой, изображенной на рис.3 (фаза δ приведена к 2π -интервалу [28, 29]). Видно, что с ростом скорости солитона точки (μ, δ) -диаграммы (сечение Пуанкаре является подмножеством

этой диаграммы [14]) ложатся на замкнутые регулярные кривые (инвариантный тор). С уменьшением же начальной скорости солитона его динамика приобретает резонансный характер. Рис.3 также подтверждает полученный в работе [30] с помощью критерия Чирикова вывод о том, что монохроматическое внешнее поле не вызывает хаотичность солитона НУШ.

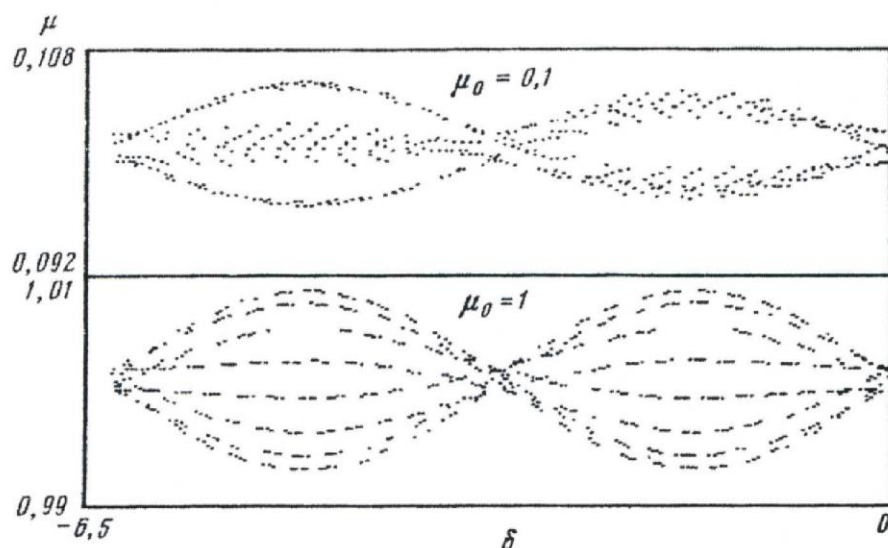


Рис. 3. Диаграмма скорость-фаза для солитона НУШ ($A=10$, $\omega=1$)

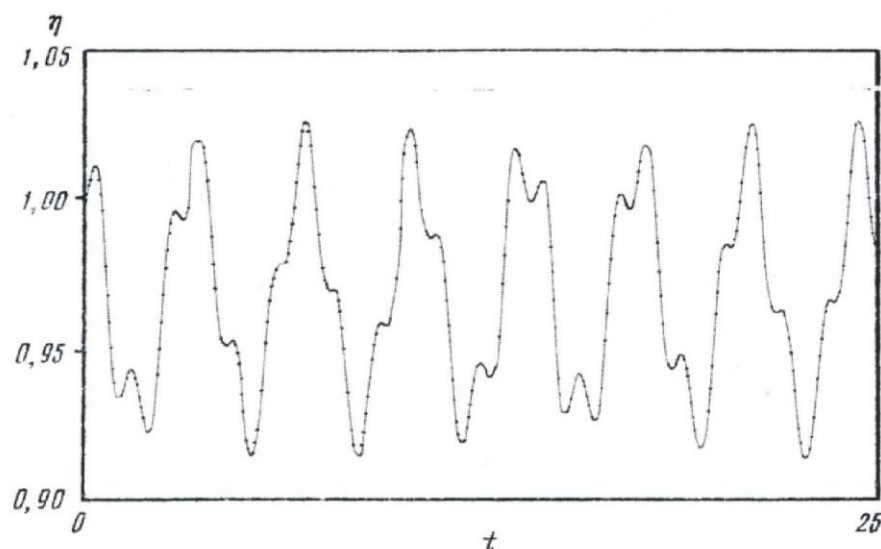


Рис.4. Влияние частоты внешнего поля на эволюцию амплитуды солитона НУШ ($A=10$, $\omega=2$, $\mu_0=0.1$)

Сравнение рис.4 и рис.1а показывает, что рост частоты внешнего поля усложняет динамику солитона НУШ. Иначе говоря, более жесткие кванты сильнее возбуждают солитон.

Таким образом, в адиабатической модели численно методом сечений Пуанкаре рассмотрено влияние амплитуды и частоты внешнего поля на эволюцию параметров солитонов НУШ и показано повышение устойчивости солитона НУШ с ростом его скорости и невозможность хаотизации его динамики монохроматическим внешним полем.

Теперь промоделируем возможность хаотизации солитона НУШ внешним полем с помощью метода максимальных ляпуновских показателей [31]. Как и в работе [26], рассмотрение ограничим первым порядком теории возмущений по внешнему полю и условием сохранения формы солитона (адиабатическая модель) [23]. В этом приближении излучение волн солитоном и его распад [8, 28] невозможны по определению. Тем не менее, как будет показано, зарождение первопричины этих процессов – детерминированного хаоса заметно уже в адиабатическом приближении.

Рассмотрим динамику солитона НУШ (8). В случае однородного внешнего поля $R(\Phi)$ эволюция параметров солитона в адиабатической модели описывается системой нелинейных уравнений (15).

Система (15) решалась численно методом Рунге-Кутты в относительных единицах при $\epsilon=0.01$ и тех же начальных условиях, что и в работе [26]: $\eta_0=1, \xi_0=\delta_0=0$. Параметрами являлись начальная скорость солитона ($\sim \mu_0$) и функционал внешнего поля $R(\Phi)$. Максимальные ляпуновские показатели определялись по асимптотике инкремента неустойчивости солитона НУШ.

На рис.5 представлена зависимость инкремента неустойчивости $\lambda_{\max}(t)$ в случае монохроматического внешнего поля $R=A*\sin(\omega t)$ (кривая 1) и при суперпозиции полей с квазииррациональным (иррациональное число $x=4.1^{0.5}$ представляется в компьютере лишь с двойной точностью) отношением частот $R=A*\sin(\omega t)+B*\sin(x\omega t)$ (кривая 2).

Видно, что зависимости $\lambda_{\max}(t)$ в обоих случаях практически совпадают и максимальные ляпуновские показатели равны нулю. Последнее означает невозможность хаотизации солитона НУШ этими полями. Аналогичное за-

ключение получено в работе [30] с помощью критерия перекрытия резонансов.

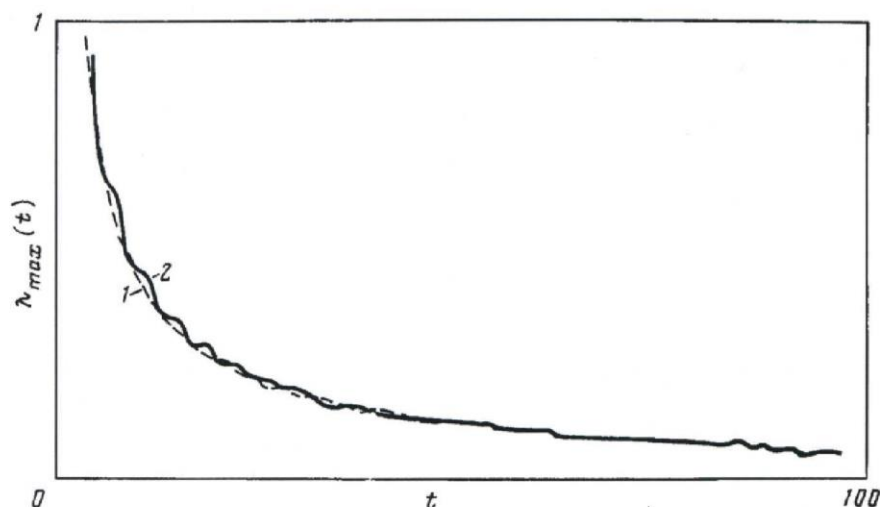


Рис.5. Зависимость инкремента неустойчивости солитона НУШ от времени при $\mu_0=0.1$ (1-монохроматическое внешнее поле ($A=10, \omega=1$); 2-суперпозиция полей с квазииррациональным отношением частот ($A, B=10, x^2=4.1$))

Динамика солитона НУШ под влиянием суперпозиции полей с иррациональным отношением их частот недоступна для прямого компьютерного моделирования из-за неизбежных при этом округлений. Но тем не менее можно утверждать, что в этом случае имеет место хаотизация солитона НУШ. Основанием тому служит представленная на рис.6а зависимость $\lambda_{\max}(t)$ в случае воздействия на солитон НУШ цуга прямоугольных импульсов (один из этих импульсов показан на рисунке), спектр которого содержит гармоники с иррациональным отношением частот. Видно, что в момент действия импульса имеет место отклонение $\lambda_{\max}(t)$ от монотонно стремящейся к нулю плавной кривой. Причем это отклонение уменьшается с ростом начальной скорости солитона НУШ. Последнее указывает на повышение устойчивости солитона НУШ с ростом его скорости и согласуется с аналогичными результатами, полученными из анализа условий положительной определенности функционала энергии солитона и при компьютерном моделировании столкновений солитонов друг с другом [12,27,32].

На рис.6б показана регулярная (δ, μ) -диаграмма (сечение Пуанкаре является ее подмножеством), не позволяющая, в отличие от метода максималь-

ных ляпуновских показателей, обнаружить хаотичность солитона НУШ. Это является еще одним примером низкой эффективности метода сечений Пуанкаре при изучении зарождения детерминированного хаоса.

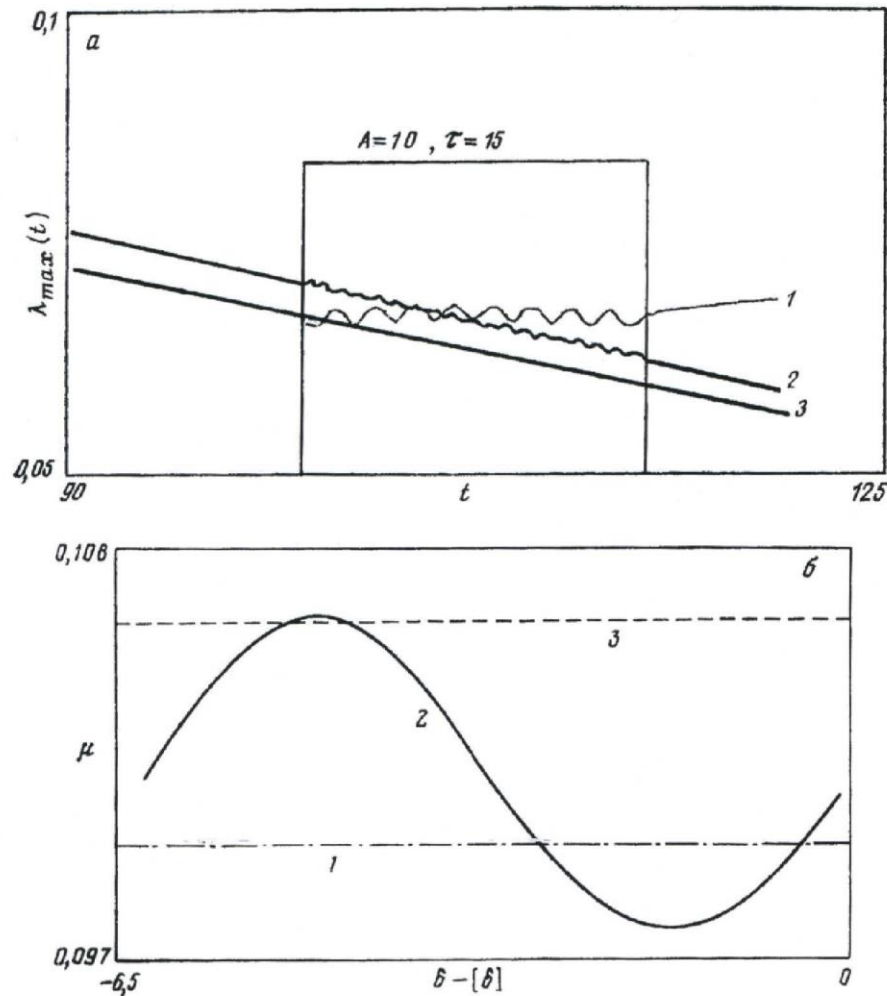


Рис. 6. Динамика солитона НУШ при воздействии цуга прямоугольных импульсов с амплитудой $A=10$ и длительностью $\tau=15$. а-временная зависимость инкремента неустойчивости (1- $\mu_0=0.1$; 2- $\mu_0=1$; 3- $A=0, \mu_0=0.1$), б- (δ, μ) -диаграмма при $\mu_0=0.1$ (1- до начала импульса, 2- во время действия импульса, 3- после окончания импульса)

6 Нерегулярная динамика солитонов НУШ в термостате.

В работах [33,34] для нерелятивистского моделирования барионов как многокварковых систем в $1/N$ -разложении используются шредингеровские солитоны. При этом фазовому переходу конфайнмент - деконфайнмент должен соответствовать достаточно быстрый при $T \geq T_c \sim 200$ МэВ развал солитона НУШ под действием тепловых флуктуаций термостата.

Излучение волн солитоном НУШ и его развал во внешних регулярных полях рассматривались в работах [28, 8]. Зарождение первопричины этих процессов – детерминированного хаоса солитона НУШ наблюдается уже в первом порядке теории возмущений по внешнему полю в адиабатической модели. Учитывая размытость фазовых переходов второго рода [35], представляет интерес промоделировать зарождение хаотичности солитона НУШ при повышении температуры.

Приближение, принятое в выражении (10) для описания эволюции солитона НУШ, позволяет также промоделировать его термодинамику при сравнительно низких температурах $T \ll T_c$, если влияние термостата на солитон описывать с помощью стохастического уравнения Ланжевена [9]

$$i\Phi_t + \Phi_{xx} + 2\Phi|\Phi|^2 = \varepsilon F(t) - iR\Phi. \quad (17)$$

Здесь $F(t)$ – случайная нормально распределенная ($\langle F^2 \rangle \sim T$) сила, действующая на солитон со стороны термостата, $\varepsilon \ll 1$. Диссипация $R \cdot \Phi$ ($R \ll 1$) вводится для предотвращения «перегрева» солитона НУШ под действием случайной силы $F(t)$.

Отметим, что механизм указанного «перегрева» аналогичен стохастической модели ускорения частиц в случайных полях, выдвигаемой для объяснения происхождения высокоэнергетических космических частиц. «Перегрев» возможен и при регулярных внешних воздействиях на систему, случайность динамики которой обеспечивается, например, ее хаотичностью. Тогда возможен диффузионный механизм развала систем связанных частиц.

Заметим также, что теория случайных (стохастических) процессов [36] стала довольно часто применяться при разработке математических моделей динамики физических систем с флуктуирующими параметрами.

Перспективной является стохастическая интерпретация динамики системы как в обычном термостате (уравнение (17)), так и в квантовом «термостате». В частности, стохастическое квантование солитонов позволяет сравнительно просто выйти за рамки квазиклассического приближения [37].

Решение уравнения (17) методом МОЗР позволяет в первом порядке теории возмущения по ε получить систему нелинейных уравнений, моделирующую эволюцию параметров солитона НУШ в термостате:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -R\eta + \varepsilon \frac{\pi}{2} F \cos \delta \sec h\Omega, \\ \dot{\delta} &= -4(\mu^2 + \eta^2) - \varepsilon \frac{\pi}{\eta} \Omega F \sin \delta \sec h\Omega th\Omega, \\ \dot{\xi} &= -4\mu - \varepsilon \frac{\pi^2}{8\eta^2} F \sin \delta \sec h\Omega th\Omega, \\ \dot{\mu} &= -\varepsilon \Omega F \cos \delta \sec h\Omega,\end{aligned}\tag{18}$$

При получении уравнения эволюции амплитуды $\eta(t)$ солитона НУШ использовался интеграл движения N остальные уравнения системы (18) аналогичны (15), $\Omega = \pi\mu/2\eta$.

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi|^2 dx.\tag{19}$$

С помощью уравнений (18) численно промоделируем возможность хаотизации солитона НУШ флуктуациями термостата. Для этого используем метод максимальных ляпуновских показателей, который, как уже отмечалось, особенно эффективен в случае слабохаотичных динамических систем. Уравнения (18) решались численно методом Рунге-Кутты в относительных единицах при тех же начальных значениях параметров солитона НУШ, что выше: $\eta_0=1$, $\mu_0=0.1$, $\xi_0=\delta_0=0$ ($\varepsilon=0.01$, $R=10^{-4}\eta$). Здесь интервал температур $T \leq$

30 ограничивался рамками применимости первого порядка теории возмущений.

На рис.7 представлена зависимость инкремента неустойчивости $\lambda_{\max}(t)$ солитона НУШ от времени.

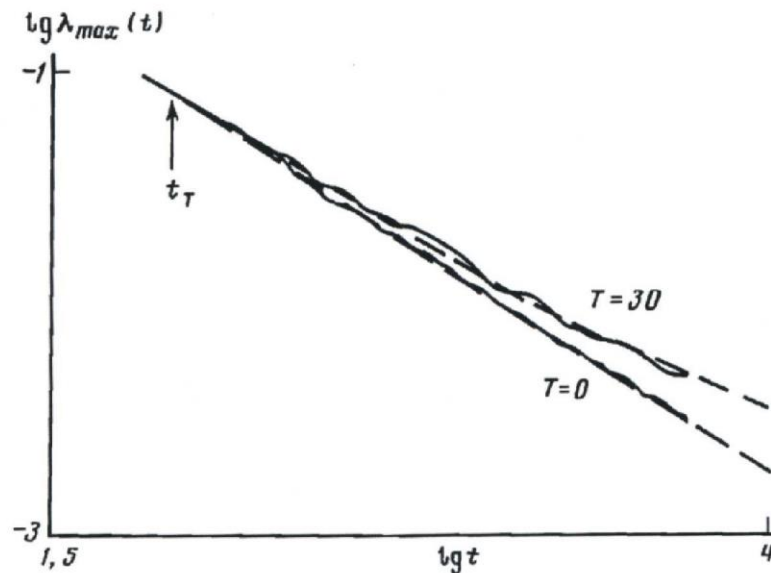


Рис.7. Зависимость инкремента неустойчивости солитона нелинейного НУШ от времени. Сплошные кривые – расчет, штриховые – аппроксимация, стрелкой указан момент включения термостата.

Момент “включения” термостата ($t_T=90$) выбран достаточно большим, чтобы заметно смогла релаксировать зависимость частот движения нелинейной системы (18) от начальных условий [14, 38]. Видно, что при нулевой температуре (нижняя кривая на рисунке 7) релаксация инкремента неустойчивости солитона НУШ удовлетворительно экстраполируется зависимостью

$$\lambda_{\max}(t) = \frac{K}{t^a} + \lambda_{\max}(t \rightarrow \infty) \quad (20)$$

(штриховая линия на рисунке) при $K=2.29$, $a=0.772$. При температуре $T=30$ (верхняя кривая на рисунке) максимальный ляпуновский показатель мал по величине и определенно положителен $\lambda_{\max}(t \rightarrow \infty) \approx 0.0018$. Это указывает на зарождение в рассматриваемом интервале температур хаотичности солитона НУШ и на большую величину времени жизни солитона $\tau \sim 1/\lambda_{\max}^x(t \rightarrow \infty)$, $x > 0$. Для нахождения параметра x при оценке времени жизни солитона НУШ в

термостате необходимо непосредственно решать волновое уравнение, не ограничиваясь рамками адиабатической модели.

Отметим работы [39-41], в которых моделировалось влияние на солитоны ряда полевых моделей не только тепловых, но и квантовых флуктуаций. Характерным является то, что тепловые флуктуации, по крайней мере при $T \gg \hbar$, приводят к развалу («взрыву») солитонов. Квантовые же флуктуации, характеризуемые «температурой» $\sim \hbar$, «взрыва» солитонов не вызывают и являются альтернативой скирмовскому механизму стабилизации солитонов от коллапса.

Все это, по-видимому, указывает на глубокую взаимосвязь обычного и квантового «термостатов», если иметь в виду, что возможной первопричиной («генератором») квантовой динамики систем является «турбулентность» метрики пространства-времени [42] и любая реальная физическая система, хаотичная благодаря своей многомерности и нелинейности, «усиливает» квантовые флуктуации до величины, определяемой внутренней энергией (температурой) системы.

Таким образом, методом максимальных ляпуновских показателей численно продемонстрирована возможность хаотизации динамики солитона НУШ тепловыми флуктуациями.

Заключение

В выпускной квалификационной работе была детально исследована нерегулярная динамика солитонов НУШ во внешних полях. Так же были получены уравнения эволюции параметров солитона НУШ, полезность которых заключается в том, что они позволяют описать динамику бесконечномерных солитонных систем конечным числом динамических переменных.

В рамках адиабатической модели была проанализирована динамика солитона НУШ в однородном внешнем поле в зависимости от амплитуды и частоты (A, ω) внешнего поля, начальных значений параметров самого солитона, в частности от его скорости. И на основе этого были сделаны выводы:

1) В адиабатической модели, методом сечений Пуанкаре, была показана невозможность хаотизации динамики солитона НУШ при воздействии зондирующего (внешнего) монохроматического оптического излучения;

2) Методом максимальных ляпуновских показателей, была показана возможность хаотизации солитона НУШ под влиянием суперпозиции полей с иррациональным отношением их частот, например, при взаимодействии последовательности лазерных импульсов в оптическом волокне при иррациональном отношении частот синхронизации.

3) Методом максимальных ляпуновских показателей численно продемонстрирована возможность хаотизации динамики солитона НУШ при воздействии широкополосного оптического излучения, обладающего тепловыми флуктуациями.

Таким образом, из данной работы можно сделать выводы о том, что метод сечений Пуанкаре не позволяет, в отличие от метода максимальных ляпуновских показателей, обнаружить хаотичность солитона НУШ. Это является еще одним примером низкой эффективности метода сечений Пуанкаре при изучении зарождения детерминированного хаоса.

Список литературы

1. В.В. Тучин, Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях, 2-е издание, Физматлит, 2010.
2. Салех Б., Тейх М. Оптика и фотоника. Принципы и применения. Т.2. пер. с англ. Дербова В.Л., Долгопрудный: Изд. дом Интеллект. 2012. 784 с. ISBN 978-5-91559-135-5.
3. Белова Т.И. // Успехи физических наук. 1997. Т.167. С.377.
4. Косевич А.М. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2001. Т.119. С.995.
5. Абдуллаев Ф.Х., Хабибуллаев П.К. Динамика солитонов в неоднородных конденсированных средах. Ташкент: ФАН, 1986.
6. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
7. Захаров В.Е. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1971. Т.60. С.993.
8. Atsushi O., Hidetoshi K. // Physical Society of Japan. 1989. V.58. P.1930.
9. Абдуллаев Ф.Х. Динамический хаос солитонов. Ташкент: ФАН, 1990.
10. Кившарь Ю.С., Маломед Б.А. // Физика многочастичных систем. 1988. №13. С.32.
11. Косевич А.М., Кившарь Ю.С. // Физика низких температур. 1982. Т.8. С.1270.
12. (7Б41-99) // Physical Review. 1998. V.E57. P.2350.
13. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
14. Табор А. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Мир, 2001.
15. Moon H. // Physical Review Letters. 1982. V.49. P.458.
16. Ковалев А.С., Богдан М.М. // Физика многочастичных систем. 1988. №13. С.20.

17. Елеонский В.М. // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т.65. С.391.
18. Елеонский В.М. // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. С.149.
19. Ахмедиев Н.Н. // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т.31. С.244.
20. Елеонский В.М. // Доклады АН СССР. 1989. Т.309. С.848.
21. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1988.
22. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989.
23. Карпман В.И., Маслов Е.М. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1977. Т.73. С.537.
24. Дианов Е.М. // Квантовая электроника. 1986. Т.13. С.331.
25. Карпман В.И., Маслов Е.М. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1978. Т.75. С.504.
26. Лавкин А.Г. // Ядерная Физика. 1991. Т.53. С.1292.
27. Гивенталь А.Б. // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т.82. С.28.
28. Nozaki K., Bekki N. // Physical Review Letters. 1983. V.50. P.1228.
29. Blow K., Doran N. // Physical Review Letters. 1984. V.52. P.526.
30. Kaup D., Newell A. // Physical Review. 1978. V.B18. P.5162.
31. Лавкин А.Г. // Ядерная Физика. 1991. Т.54. С.717.
32. Alkover R. // Physical Review. 1990. V.B236. P.310.
33. Боголюбовская А.А., Боголюбовский И.Л. // Теоретическая и математическая физика. 1983. Т.54. С.258.
34. Белова Т.И., Кудрявцев М.Л. // Журнал экспериментальной и
35. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М: Наука, 2001.
36. Кляцкин В.Г. Стохастические уравнения. М.: Наука, 2001.
37. Букенов А.К. // Гравитация и квантовая теория поля. Алма-Ата: КазГУ, 1990. С.69.

38. Надточий П.Н. // Ядерная Физика. 2001. Т.64. С.926.
39. Jain P., Schetchoc J. // Physical Review. 1990. V.D41. P.3855.
40. Binaduri R., Suzuki A. // Physical Review. 1990. V.D41. P.959.
41. Кобушкин А.П. // Ядерная Физика. 1991. Т.53. С.552.
42. Блохинцев Д.И. Пространство и время в микромире. М.: Атомиздат, 1991.
43. Новокшенов В.Ю. Математические модели в естествознании (Введение в теорию солитонов). Уфа: Учебное пособие, 1999.

Приложение

Метод обратной задачи рассеяния

Метод обратной задачи [43] возник как своеобразное нелинейное обобщение классического метода Фурье, предназначенного для интегрирования линейных уравнений с частными производными. Рассмотрим эту аналогию на примере линеаризованного уравнения КдВ

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad x \in R. \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L_2(R) \quad (2)$$

Будем решать это уравнение с начальным условием

Применяя преобразование Фурье по x

$$F(u) = \tilde{u}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x, t) dx$$

и пользуясь известными правилами преобразования производных

$$F(u_x) = -i\lambda F(u), \quad F(u_{xxx}) = (-i\lambda)^3 F(u),$$

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0. \quad (3)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение по t

Здесь λ - переменная в преобразовании Фурье, входит как постоянный параметр. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t},$$

где постоянная интегрирования $C(\lambda)$ должна быть найдена из начального условия (2)

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx = F(u_0).$$

Таким образом, мы нашли преобразование Фурье решения задачи Коши

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

(1),(2). Применяя обратное преобразование Фурье, получим окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda$$

Роль преобразования Фурье в случае (нелинейного) уравнения КдВ будет играть преобразование рассеяния, осуществляемое обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0, \quad (4)$$

с коэффициентом $u=u(x,t)$ – решением уравнения КдВ. Предполагая $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, определим данные рассеяния $a(\lambda,t)$ и $b(\lambda,t)$ соотношением $S(u)=\{a,b\}$;

$$\Phi \rightarrow \begin{cases} e^{-i\lambda x}, & x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda,t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda,t), & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5)$$

Оказывается, что динамика по t так определенных данных рассеяния очень похожа на динамику по t данных Фурье для линеаризованного уравнения КдВ, рассмотренного выше:

$$a(\lambda,t) = a(\lambda,0), \quad b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t}.$$

Таким образом общая схема метода обратной задачи рассеяния выглядит так:

$$\begin{array}{ccc} u(x,0) & \xrightarrow{S} & \begin{Bmatrix} a(\lambda,0) \\ b(\lambda,0) \end{Bmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x,t) & \xleftarrow{S^{-1}} & \begin{Bmatrix} a(\lambda,t) = a(\lambda,0) \\ b(\lambda,t) = b(\lambda,0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{Bmatrix} \end{array}$$

Теперь необходимо понять откуда взялось уравнение (4) и какое отношение оно имеет к уравнению КдВ.

Ответ заключается в том, что уравнение (4) входит в так называемую пару Лакса, определяемую следующим образом.

Рассмотрим пару линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \psi_x = L\psi \\ \psi_t = A\psi \end{cases} \quad (6)$$

где неизвестная функция является 2×2 матрицей

$$\psi = \psi(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix},$$

так же как и коэффициенты $L=L(t,x,\lambda)$ и $A=A(t,x,\lambda)$, стоящие в правых частях. Очевидно, L и A не могут быть произвольными, поскольку они задают два независимых уравнения пары Лакса (6) на одну неизвестную функцию ψ . Предполагая все компоненты ψ , L и A гладкими, а ψ - фундаментальным решением ($\det \psi \neq 0$), найдем условие совместности уравнений (6).

Дифференцируя первое уравнение по t , а второе по x , имеем

$$\psi_{xt} = L_t \psi + L \psi_t = A_x \psi + A \psi_x.$$

Выражая далее ψ_t и ψ_x из уравнений (6) и сокращая на ψ справа, получим окончательно

$$L_t + LA = A_x + AL, \quad \text{или} \quad L_t - A_x = [A, L], \quad (7)$$

где $[A, L]$ - коммутатор матриц A и L , то есть $[A, L] = AL - LA$. Уравнение (7) и есть необходимое и достаточное условие совместности системы (6).

Выберем матрицы A и L в виде

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in C \quad (8)$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где λ - произвольный комплексный параметр, а $u=u(x,t)$ - векторная функция, не зависящая от λ .

Подставим матрицы в условие совместности (7), для чего вычислим соответствующие производные и коммутаторы. Имеем:

$$L_t = i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_x = -4\lambda^2 i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2iuu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Поскольку матрицы L и A являются многочленами по λ , в равенстве (7) следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ . Имеем равенства:

$$\begin{aligned}\lambda^2 : 4i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i(-2i) \begin{pmatrix} 0 & -2iu_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda^1 : 2i \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 2iu_{xx} + 4iu^2 \\ -4iu & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

которые выполняются тождественно по u . Последнее равенство при нулевой степени λ дает:

$$\begin{aligned}\lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iuu_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & 2u_x \end{pmatrix} &= 0, \\ iu_t - iu_{xxx} - 4iuu_x - 2iuu_x &= 0, \\ u_t - u_{xxx} - 6uu_x &= 0.\end{aligned}$$

Тем самым мы вывели уравнение КдВ из равенства (7). Верно и обратное утверждение, то есть если u удовлетворяет уравнению КдВ, тогда имеет место условие совместности (6) с матрицами A и L вида (8) и (9).