Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Анализ динамических характеристик сложных режимов автоколебаний по зашумленным точечным процессам

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Холуяновой Инны Александровны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ______________________ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ В.С. Анищенко

Саратов 2016 год

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях естественных наук встречаются задачи исследования динамики систем по последовательностям повторяющихся событий, которые происходят в определенные моменты времени. Такие последовательности удобно описывать в виде набора точек на временной оси, что позволяет рассматривать их в качестве реализаций так называемых *точечных процессов* [1]. Случайный или детерминированный процесс, в котором носителями информации о динамике исследуемой системы являются времена повторяющихся событий, называется точечным процессом. Примерами могут служить моменты срабатывания пороговых устройств, когда непрерывный сигнал достигает на входе фиксированного уровня; моменты вылета электронов из нагретого катода электронной лампы, что приводит к наличию дробового шума в анодном токе. В статистической радиофизике хорошо известен процесс Пуассона, представляющий собой простейший точечный процесс [1]. Для динамики биологических систем примерами могут послужить характерные паттерны на электроэнцефалограмме, возникающие при эпилепсии, и «включения» нейронов [2]. В радиофизике точечные процессы рассматриваются, например, при изучении информационного кода, передаваемого нейронами в виде последовательностей электрических импульсов (потенциалов действия).

К примерам точечных процессов в теории колебаний можно отнести последовательности времен пересечения фазовой траекторией секущей плоскости, на основе которых вычисляются времена возврата в секущую. Также, как и сечение Пуанкаре, времена возврата позволяют характеризовать «поперечную» структуру хаотического аттрактора [3]. В рамках данной выпускной квалификационной работы рассмотрена следующая **задача:** имеется сигнал, который отражает динамику автоколебательной системы и имеет сравнительно небольшую длительность (точечный процесс). По этому сигналу при наличии аддитивного шума нужно количественно охарактеризовать режим динамики системы, генерирующей данный сигнал.

Необходимость анализа точечных процессов появляется, например, при изучении динамики на выходе пороговых устройств, когда нужно описать свойства входного (неизвестного) процесса $S(t)$, имея только запись выходного сигнала в виде последовательности моментов времени «срабатывания» порогового устройства. Если на выходе порогового устройства генерируются повторяющиеся импульсы при превышении внешним воздействием порогового уровня, то возникает вопрос, какую информацию о входном сигнале можно извлечь из регистрируемого точечного процесса?

На сегодняшний день многие задачи, относящиеся к возможности реконструкции динамических систем по точечным процессам, расчета метрических и геометрических характеристик аттракторов динамических систем, имеют решение. Но при этом существуют и нерешенные вопросы, касающиеся диагностики гиперхаотических режимов динамики по точечным процессам и влияния аддитивных помех на точность проводимых вычислений.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование возможности диагностики хаотических и гиперхаотических режимов динамики автоколебательных систем по точечным процессам на основе показателей Ляпунова и развитие подходов, повышающих точность их вычисления по зашумленным данным.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе численного анализа базовых моделей автоколебательных систем, демонстрирующих хаотическую или гиперхаотическую динамику. Анализ точечных процессов проводился с применением метода расчета старшего показателя Ляпунова [4].

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1.Методы анализа точечных процессов; 2. Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 41 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Методы анализа точечных процессов. Проведем рассмотрение задачи о преобразовании сигнала $S(t)$ пороговым устройством, которое производит генерацию стереотипных одиночных импульсов при пересечении сигналом фиксированного порогового уровня. Основываясь на последовательности импульсов на выходе порогового устройства, то есть анализируя точечный процесс T_i, требуется охарактеризовать свойства входного процесса. Зачастую рассматривают две основных модели пороговых систем: «накопление-сброс» (НС) и «пересечение порога» (ПП) [5].

При рассмотрении НС-модели, описывающей преобразование детерминированных процессов, в качестве сигнала $S(t)$ на входе порогового устройства преимущественно выбирают линейное преобразование одной из переменных маломерной динамической системы, демонстрирующей режим автоколебаний, или, в отдельных случаях, функцию нескольких переменных. Начиная с некоторого момента T_0, сигнал $S(t)$ интегрируется, а времена T_i, когда интеграл достигает заданное пороговое значение θ, определяются уравнением:

$$\int_{T_i}^{T_i+1} S(t)dt - \theta, \qquad I_i = T_{i+1} - T_i. \tag{1}$$

При достижении порога генерируется кратковременный импульс, после чего значение интеграла обнуляется, и интегрирование продолжается снова.

Модель «пересечение порога» (ПП) предполагает выбор уровня θ, который задает уравнение секущей $S = \theta$, и запись интервалов времени между пересечениями данного уровня сигналом $S(t)$ в одном направлении, к примеру, снизу вверх. Интервалы I_i соответствуют временам возврата в секущую плоскость. При рассмотрении режимов хаотических колебаний, когда входным сигналом является одна из переменных, описывающих состояние системы, анализ последовательностей межимпульсных интервалов (МИ) может позволить вычислить характеристики хаотического режима колебаний на входе порогового устройства, например, фрактальной размерности или показателей

Ляпунова. Стоит отметить, что при высокой частоте генерации межимпульсные интервалы I_i, которые описываются НС-моделью [6], позволяют восстановить входной сигнал $S(t)$. Было сформулировано доказательство теоремы вложения для временных интервалов модели «накопление-сброс» (теорема Зауэра [7]). Эта теорема может рассматриваться как аналог теоремы Такенса [8] для случая точечных процессов. Строгого обоснования реконструкции динамических систем по последовательностям времен возврата в настоящее время нет.

В данной работе будет использоваться модификация стандартного метода расчета показателей Ляпунова по временным рядам [4]. Если расчет λ_1 проводится по одной из координат состояния динамической системы $x(t)$, то в этом случае вначале нужно провести реконструкцию ДС методом задержек, то есть получить множество векторов вида

$$\vec{z}(t) = \{x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \ldots, x(t+(m-1)\tau)\}, \qquad (2)$$

где m – размерность пространства вложения, τ – задержка по времени между координатами, описывающими состояние системы. После реконструкции (2) появляется возможность перейти в фазовое пространство системы и изучать разбегание фазовых траекторий.

Существует много различных алгоритмов расчета старшего показателя по экспериментальным данным. Мы будем применять наиболее популярный алгоритм [4]. Из-за того, что в наличии есть только одна траектория, приходится решать следующую задачу – нужно обеспечить уменьшение длины вектора возмущения и при этом уменьшение угла между вектором возмущения до и после перенормировки, то есть ошибку ориентации.

Рассмотрим, как можно применять алгоритм [4] для точечных процессов. Проанализируем вначале модель НС, которая описывается уравнением (1). Если частота генерации импульсов велика, то вычислить интеграл (1) можно методом прямоугольников (самым простым методом приближенного интегрирования). Это позволяет восстановить значения сигнала на входе модели НС в моменты времени T_i.

$$\frac{1}{I_i} \approx S_i/\theta = kS(T_i), \quad k = 1/\theta. \qquad (3)$$

Чтобы перейти к равномерной выборке по времени $S(i\Delta t)$, можно воспользоваться одним из методов интерполяции, например, интерполяции сплайнами. После этого может применяться метод реконструкции (2) и проводиться расчет старшего показателя Ляпунова [4]. Тестирование данного метода на примере модели Ресслера позволило обеспечить хорошую точность расчета старшего показателя [9]. Было установлено соответствие между результатами вычисления старшего ляпуновского показателя по исходному сигналу $S(t)$ и рассчитанного значения λ_1 по восстановленному сигналу. При этом достигается хорошая точность вычисления (ошибка менее 10%).

При расчете показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата осуществляется переход от набора временных интервалов I_i к точкам $\omega(T_i) = 2\pi/I_i$, которые соответствуют значениям усредненной мгновенной частоты $\overline{\omega}^{H}$ за время возврата $I_i = T_{i+1} - T_i$ (здесь T_i - времена пересечения порогового уровня). После чего точки $\omega(T_i)$ интерполируются гладкой функцией (кубическим сплайном) $\omega_{int}(t)$, чтобы выполнить переход к сигналу с равномерной выборкой. При этом появляется возможность аппроксимировать мгновенную частоту колебаний, и такая аппроксимация позволяет вычислять старший показатель Ляпунова с ошибкой порядка 10%. Наряду с системой Ресслера тестирование данного подхода проводилось на других моделях динамических систем, таких как система Лоренца, генератор Анищенко-Астахова и т.д.

Проанализируем возможность диагностики режима гиперхаоса. С этой целью рассмотрим модель двух связанных систем Рёсслера:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = -\omega_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1),\\
&\frac{dy_1}{dt} = \omega_1 y_1 + a y_1, \ \frac{dz_1}{dt} = \beta + z_1(x_1 - \mu),\\
&\frac{dx_2}{dt} = -\omega_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2),\\
&\frac{dy_2}{dt} = \omega_2 y_2 + a y_2, \ \frac{dz_2}{dt} = \beta + z_2(x_2 - \mu),
\end{aligned} \qquad (4)$$

где параметры α, β и μ характеризуют динамику каждой подсистемы, γ – параметр связи, $\omega_1 = \omega_0 + \Delta$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Delta$ – базовые частоты и Δ – расстройка по частоте. В проведенных расчетах параметры были выбраны следующими: $\alpha = 0.15$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.02$, $\Delta = 0.0093$, $\omega_0 = 1.0$.

Чтобы правильно вычислить оба показателя и идентифицировать режим гиперхаотической динамики, в работе [10] были проанализированы одновременно две последовательности времен возврата в секущие плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. При этом реконструкция проводилась таким образом, что половина координат состояния определялась по первой последовательности времен возврата, а половина – по второй. В этом случае режим динамики удалось правильно диагностировать.

Результаты проведенных исследований. Диагностика режима гиперхаотических автоколебаний в динамике связанных автоколебательных систем не всегда может быть проведена по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре и, в соответствии с результатами ранее проводившихся исследований [10], для ее осуществления нужно рассматривать две различные секущие плоскости и, соответственно, проводить обработку двух последовательностей времен возврата, введенных для каждой системы. Рассмотрение одной последовательности будет приводить к тому, что гиперхаотический режим динамики ошибочно диагностируется как хаотический. Тем не менее, полной ясности в вопросе о диагностике переходов между хаотическими и гиперхаотическими колебаниями по временам возврата еще не достигнуто.

Чтобы исследовать возможность диагностики гиперхаотических колебаний по одной последовательности времен возврата в секущую плоскость, были рассмотрены различные варианты секущих, например, секущие плоскости вида $x_2(t) + y_1(t) = 0$ и $x_1(t) + y_2(t) = 0$. Особенностью таких секущих плоскостей является то, что они учитывают в равной степени вклад обеих подсистем в динамике связанных моделей Resслера. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что есть пороговое устройство, на вход которого поступает некоторый сигнал $S(t)$, а на выходе генерируется последовательность импульсов. Выберем в качестве входного сигнала $S(t)$ сумму динамических переменных системы (4), например, $x_2(t) + y_1(t)$. Возникает вопрос, можно ли в этом случае правильно диагностировать режим динамики системы (4)?

Выбор входного сигнала в виде $x_2(t) + y_1(t)$ означает, что на входе порогового устройства вклад каждой подсистемы модели связанных систем Ресслера является сопоставимым – амплитуды колебаний $x_2(t)$ и $y_1(t)$ примерно равны. В этом случае переходы между хаосом и гиперхаосом определяются правильно, и наблюдается небольшая погрешность расчета старшего показателя (порядка 10%, что допустимо для метода расчета показателя Ляпунова по временным рядам). Поведение второго показателя позволяет увидеть переход к гиперхаосу при изменении управляющего параметра.

Тем не менее, остаются два открытых вопроса – какая минимальная выборка достаточна для диагностики режима хаотических или гиперхаотических колебаний, и насколько результаты расчета чувствительны к наличию флуктуаций в точечном процессе? Чтобы ответить на первый вопрос, в данной работе были проведены расчеты двух старших показателей Ляпунова от длительности последовательности времен возврата.

Было установлено, что зависимость первого показателя демонстрирует небольшие отклонения от среднего уровня (от теоретически ожидаемого значения λ_1=0.03, вычисленного по уравнениям модели) в области малых значений числа отсчетов последовательности времен возврата n (например, при n<500). С ростом n отклонения уменьшаются. Отметим, что даже для n=100 можно решать задачу диагностики по очень короткой выборке. Однако для снижения погрешности до значения около 10% целесообразно рассматривать 500 отсчетов. То же самое можно сказать и о втором показателе. Ориентировочная граница точности метода расчета второго показателя составляет около 0.005 (для первого показателя точность достигает примерно 0.001). Если вычисляется величина $\lambda_2 < 0.005$, то мы рассматриваем вычисленный показатель как нулевой, и лишь при превышении данного порогового значения интерпретируем второй показатель как положительный. Для этого нужно рассматривать порядка 400-500 отсчетов последовательности времен возврата.

Аналогичные выводы можно сделать и при рассмотрении режима гиперхаоса в модели связанных систем Рёсслера (μ=7.2). При рассмотрении очень короткой выборки (*n*=100) гиперхаотический режим ошибочно может быть диагностирован как хаотический. Но при увеличении объема выборки до 400-500 отсчетов точность оценки показателей Ляпунова является достаточной, чтобы избежать ошибочной идентификации динамического режима. Вычисляемые показатели в этом случае приближаются к ожидаемым значениям, вычисленным по уравнениям модели (λ_1=0.052, λ_2=0.018).

Далее было исследовано влияние флуктуаций на точность вычисления показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата. С этой целью в последовательности добавлялся белый шум небольшой интенсивности. Было установлено, что добавление шума интенсивностью выше 0.0001 приводит к сложностям диагностики второго показателя – режим хаотических колебаний начинает диагностироваться как режим гиперхаоса.

Учитывая то обстоятельство, что второй показатель Ляпунова является очень чувствительным к наличию аддитивных помех в регистрируемом сигнале, при рассмотрении зашумленных точечных процессов ограничимся расчетами только старшего показателя и проанализируем, как присутствие шума влияет на точность его вычисления. С этой целью рассмотрим динамику разных моделей пороговых устройств – моделей НС и ПП. Формально, алгоритм [4] позволяет частично исключить эффект дополнительного разбегания траекторий (вызванного шумом) за счет введения минимального расстояния между точками в фазовом пространстве. В этом случае анализируется скорость экспоненциального разбегания траекторий на расстояниях, превышающий данный минимальный уровень. На практике определить такое минимальное расстояние достаточно сложно, если анализируются точечные процессы. По этой причине для того, чтобы оценить правильность расчета старшего показателя Ляпунова по зашумленным точечным процессам (*при рассмотрении только аддитивного шума, не влияющего на динамику системы*) в данной работе рассматривается модифицированный метод расчета ляпуновского показателя. Он предусматривает построение зависимости скорости экспоненциального разбегания траекторий от максимально допустимой ошибки ориентации α. Метод был протестирован на моделях НС и ПП.

Было показано, что в отсутствие шума наблюдается максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ при некотором значении $\alpha=\alpha_m$ в области небольших значений углов. Он соответствует результатам расчетов по уравнениям модели. Слева от максимума недооценка λ_1 происходит из-за низкой вероятности выбора малых по модулю векторов возмущения и частого выхода за границы линейного приближения. Справа от максимума из-за возрастающих ошибок ориентации приходится учитывать разбегание траекторий в направлениях, ортогональных направлению их максимального разбегания.

Характер зависимости $\lambda_1(\alpha)$ меняется при наличии шума в последовательности. В области больших значений α появляется положительный наклон зависимости $\lambda_1(\alpha)$, и чем больше интенсивность шума, тем больше соответствующий наклон, и тем раньше меняется характер поведения зависимости $\lambda_1(\alpha)$. С дальнейшим ростом интенсивности шума максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ исчезает, и после этого результаты перестают быть достоверными. Таким образом, рассматриваемый подход позволяет определить максимально допустимый уровень шума, при котором можно правильно вычислить старший показатель Ляпунова по зашумленному точечному процессу. Аналогичные выводы были сделаны для модели ПП, подтверждая, что отмеченные закономерности являются общими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе решалась задача диагностики режима сложных колебаний, включая случай хаотической и гиперхаотической динамики, по точечным процессам при наличии аддитивного шума. Было показано, что в случае детерминированной динамики переходы хаос-гиперхаос правильно диагностируются по сравнительно коротким последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре. Например, для хаотического режима динамики оценить старший показатель Ляпунова можно по последовательности, содержащей 100 времен возврата в секущую плоскость. Чтобы обеспечить ошибку расчета показателя менее 10%, объем выборки нужно увеличить до 400-500 времен возврата. В случае гиперхаотического режима динамики расчеты двух показателей Ляпунова нужно проводить по выборкам не менее 200 отсчетов, но для повышения точности вычислений объем выборки нужно также увеличивать до 400-500 отсчетов.

Присутствие аддитивного шума в последовательности времен возврата приводит к росту ошибок вычислений, которые более сильно сказываются при расчете второго показателя. В частности, при интенсивности белого шума, превышающей 0.0001, появляются неоднозначности в диагностике переходов хаос-гиперхаос.

Был протестирован модифицированный метод расчета старшего показателя Ляпунова по зашумленным точечным процессам, идея которого состоит в построении зависимости старшего показателя от максимально допустимой ошибки ориентации векторов возмущения при проведении перенормировок. На примере модели НС было показано, что рассмотренный модифицированный метод позволяет определить, содержит ли точечный процесс аддитивный шум и провести проверку достоверности расчетов старшего показателя Ляпунова. Для модели ПП были отмечены те же закономерности зависимости старшего показателя от максимально допустимой ошибки ориентации при наличии аддитивного шума.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М.А.Миронов − М.: Сов.радио, 1977.

[2] Brown, E. N. Multiple neural spike train data analysis: state–of–the–art and future challenges / E. N. Brown, R. E. Kass, P. P. Mitra // Nature Neuroscience. – 2004. – Vol. 7. – P. 456–461.

[3] Hegger, R. Embedding of sequence of time intervals / R. Hegger, H. Kantz // Europhysics Letters. − 1997. − Vol. 38. − P. 267−272.

[4] Wolf, A. Determining Lyapunov exponents from a time series / A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano // Physica D. − 1985. − Vol. 16. − P. 285−317.

[5] Tuckwell, H. C. Introduction to theoretical neurobiology / H. C. Tuckwell. − Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[6] Racicot, D. M. Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models / D. M. Racicot, A. Longtin // Physica D. − 1997. − Vol. 104. − P. 184−204.

[7] Sauer, T. Reconstruction of integrate-and-fire dynamics / T. Sauer // Nonlinear dynamics and time series ; ed. by Culter C., Kaplan D. − 1997. − Vol. 11. − P. 63−75.

[8] Takens, F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical systems and turbulence ; ed. by Rang D., Young L. S. − 1980. − Vol. 898. − P. 366−381.

[9] Janson, N. B. Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals / N. B. Janson, A. N. Pavlov, A. B. Neiman, V. S. Anishchenko // Phys. Rev. E. − 1998. − Vol. 58. − P. R4−R7.

[10] Pavlov, A. N. Chaotic dynamics from interspike intervals / A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V.S. Anishchenko // Phys. Rev. E. − 2001. − Vol. 63. − P. 036205.