

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ**

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

студентки 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 Педагогическое образование**

**Механико-математического факультета**

Силаковой Оксаны Вячеславовны

(автореферат)

Научный руководитель

Старший преподаватель

\_\_\_\_\_

М.А. Осипцев

подпись, дата

Зав.кафедрой

Профессор, доктор

\_\_\_\_\_

Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2016

## **Введение.**

Данная выпускная квалификационная работа представляет собой разработку электронного образовательного курса «Преобразование графиков функций». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 8 - 9-х классов основного общего образования.

Образовательная разработка «Преобразование графиков функций» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Целью создания данного образовательного курса является:

- повышение качества обучения при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;
- создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе.
- обобщить, систематизировать и расширить знания и умения по построению графиков различных функций в прямоугольно-декартовой системе координат, их преобразованию.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования Ipsilon;
- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно измерительными материалами по теме «Преобразование графиков функций», реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;
- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

- рассмотреть методы построения графиков функций, опирающиеся на простейшие приемы (растяжение, сжатие, параллельный перенос, симметрию).

Свободное владение техникой построения графиков функций часто помогает решать многие задачи и порой является единственным средством их решения. График и есть изображение нашего понимания того, как ведет себя функция. Для этого необходимо знать элементарные функции, их свойства, владеть методикой построения графиков. А также необходимо знать каким образом можно, преобразовывать графики функций. Правил преобразования графиков функции можно эффективно применять при решении заданий ЕГЭ (части С). Все вышесказанное определяет актуальность рассмотрения данной темы.

### Структура электронного образовательного курса



Рекомендую следующий порядок изучения данного электронного курса. Сначала необходимо ознакомиться с основными понятиями по данной теме. Следующим этапом следует изучить теоретическую часть.

После изучения данных разделов можно браться за решение тестов базового уровня сложности, среднего уровня сложности и тесты повышенного уровня сложности. Если тесты не вызывают затруднений. Можно приступать к решению задач. Каждая задача первого уровня сложности будет оцениваться в 3 балла. Задания считается успешно пройденным, если учащийся набрал от 18 до 21 балла. Такое количество баллов можно приравнять к оценке «5». Если учащийся набрал от 12 до 17 баллов, это говорит о менее успешном освоении темы и приравнивается к оценке «4», от 6 до 11 баллов – это оценка «3». Наконец, если набрано менее 6 баллов, значит, есть необходимость снова вернуться к изучению теоретической части.

Когда задания базового уровня сложности не будут вызывать затруднений, следует приступать к задачам среднего уровня сложности. Таких задач пять. За выполнение каждого задания можно набрать от 3 до 12 баллов. Максимальный балл за выполнение этого раздела составляет 24 бала.

Минимальное количество баллов, которое будет свидетельствовать о прохождении данного раздела – это 12 баллов (3 задачи). Соответственно, – 12 баллов – это оценка «3», 15-18 баллов – это оценка «4», 21-24 балл – это оценка «5». Перевод в оценку необходим для самоконтроля, поэтому, если учащийся набрал менее 12 баллов и получил оценку «2», необходимо снова обратиться к теоретическому материалу.

Наконец, более одаренные учащиеся или желающие испытать свои умственные способности могут приступать к решению задач третьего уровня. Таких заданий 11. Если учащийся сделал правильно 3-4 задачи такого уровня, это говорит это о хорошем уровне знаний по теме «Преобразование графиков функций».

## Основная часть.

### 1. Понятие функции.

Пусть  $X$  – некоторое числовое множество. На множестве  $X$  определена числовая функция, если каждому элементу множества  $X$  поставлено в соответствие единственное действительное число. Множество  $X$  называется при этом областью определения функции. Произвольный элемент области определения обычно обозначается буквой  $x$  и называется аргументом функции или независимой переменной.

Например, числовая функция определена следующим образом: каждому числу  $x$  отрезка  $[-1; 1]$  ставится в соответствие число  $2x+1$ . Отрезок  $[-1; 1]$  – ее область определения, закон соответствия может быть записан так:  $x \rightarrow 2x+1$ .

Обычно закон соответствия обозначается некоторой буквой, например  $f$ , и говорится, что на множестве  $X$  определена функция  $f$  или  $f(x)$ . Употребляется также запись функции в виде  $y = f(x)$ , здесь  $x$  означает аргумент,  $y$  – соответствующее ему значение функции,  $f$  – закон соответствия. Иногда говорят, что функция  $f$  ставит в соответствие (сопоставляет) значению аргумента  $x$  значение  $y$ .

Если число  $a$  принадлежит области определения функции  $f$ , то говорят, что функция  $f$  определена в точке  $a$ . Для того чтобы указать значение функции в фиксированной точке  $a$ , используется такая запись:  $f(a)$ ,  $y(a)$ .

Множество всех значений функции  $f(x)$  называется множеством значений функции  $f$ . Например, множество значений функции  $y = 2x+1$ ,  $x \in [-1; 1]$ , есть отрезок  $[1; 3]$ , а множество значений функции Дирихле состоит из двух чисел 0 и 1.

Две функции считаются равными, если у них одна область определения и каждому числу из области определения они сопоставляют одно и то же значение.

ние. Например, функция  $f(x) = x-1$  с областью определения  $(-1; +1)$  и функция  $g(x) = (x^2-1)/(x+1)$  с той же областью определения равны, так как для любого  $x$  из множества  $(-1; +1)$  имеет место равенство:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1.$$

## 2. Преобразование графиков.

### Перенос вдоль оси ординат.

Пусть дана функция  $y=f(x)$  – одна из функций и ее график построен. Как следствие теоремы 1, для построения графика функции  $y=f(x)+c$  следует график функции  $y=f(x)$  сдвинуть вдоль оси  $Oy$  на  $c$  единиц в сторону, совпадающую со знаком  $c$ , или перенести параллельно ось  $Ox$  в сторону, противоположную знаку.

Пример

Построить график функции  $y=2^x + 3$

Построение

а) строим график функции  $y=2^x$

б) Сдвигаем график функции  $y=2^x$  на 3 единицы вверх вдоль оси  $Oy$ .

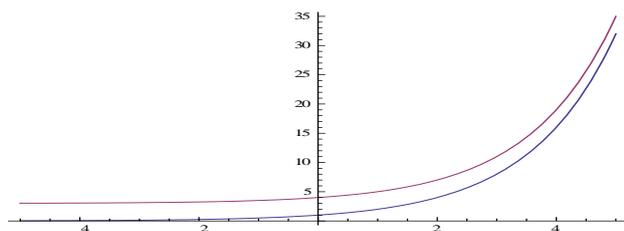


Рис.1

### Перенос вдоль оси абсцисс

Пусть  $y=f(x)$  – одна из функций и ее график построен. Для построения графика функции  $y=f(x+c)$  следует график функции  $y=f(x)$  сдвинуть вдоль оси  $Ox$  на  $c$  единиц в сторону, противоположную знаку  $c$ , или перенести параллельно ось  $Oy$  в сторону, совпадающую со знаком  $c$ .

Пример

Построить график функции  $y = (x-1)^2$ .

Построение

а) строим график функции  $y = x^2$ ;

б) сдвигаем график функции  $y = x^2$  на 1 единицу вправо вдоль оси  $Ox$ .

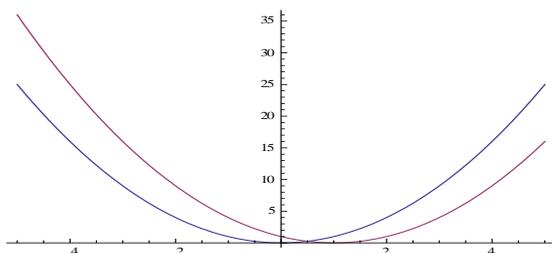


Рис.2

### Отражение

Пусть дан график функции  $y = f(-x)$ . Для построения графика функции  $y = f(x)$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и отразить его относительно оси ординат. Полученный график является графиком функции

$$y = f(-x).$$

Пример

Построить график функции  $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ .

Построение

а) строим график функции  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

б) отобразим график функции  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  относительно оси  $Oy$ .

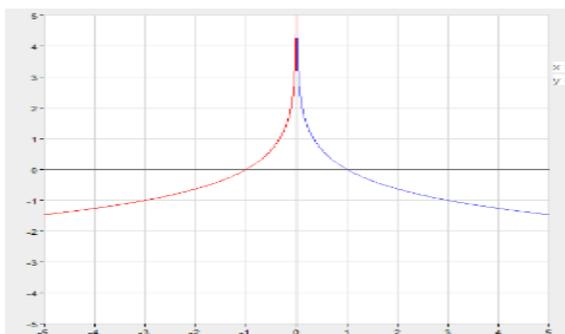


Рис.3.

**Теорема 6. Построение графика функции  $y = -f(x)$ .** Для построения графика функции  $y = -f(x)$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и отобразить его относительно оси абсцисс.

Пример 6

Построить график функции  $y = -\frac{1}{x}$ .

Построение

а) строим график функции  $y = \frac{1}{x}$ ;

б) отобразим график функции относительно оси  $Ox$ .

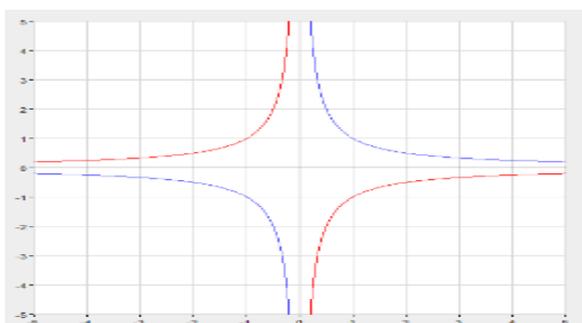


Рис.4

**Деформация**

**Сжатие графика вдоль оси ординат  $y = af(x)$ ;  $0 < a < 1$**

Пусть дан график функции  $y = af(x)$ . Для построения графика функции  $y = f(x)$  следует построить график функции  $y = af(x)$  и уменьшить его ординаты в  $\frac{1}{a}$  раз при  $0 < a < 1$ .

Пример 7

Построить график функции  $y = \frac{1}{2} \cos x$ .

Построение

а) построим график функции  $y = \frac{1}{2} \cos x$ ;

б) уменьшим его ординаты в 2 раза.

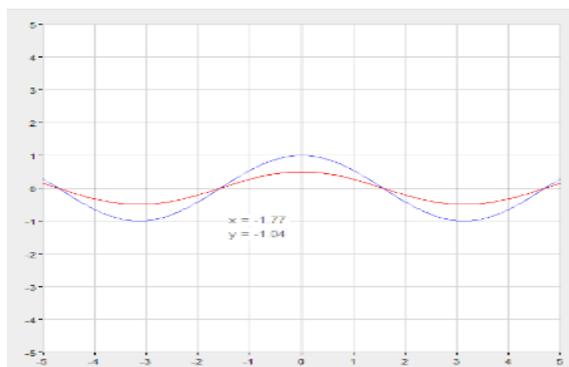


Рис.5

**Растяжение графика вдоль оси ординат  $y = af(x)$ ;  $a > 1$ .**

Для построения графика функции  $y = af(x)$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и увеличить его ординаты в  $a$  раз при  $a > 1$ .

Пример 9

Построить график функции  $y = 2\sqrt{x}$ .

Построение

а) построим график функции  $y = \sqrt{x}$ ;

б) увеличим его ординаты в 2 раза.

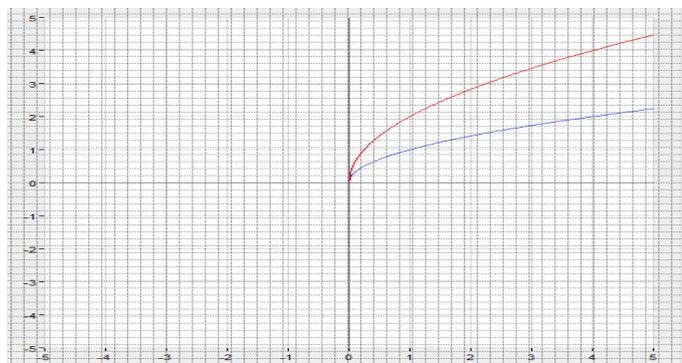


Рис.6

**Растяжение графика вдоль оси абсцисс  $y = f(\omega x)$ ;  $0 < \omega < 1$ .**

Пример. Построить график функции  $y = \log_2\left(\frac{1}{2}x\right)$ .

Построение

а) построим график функции  $y = \log_2(x)$ ;

б) увеличим его абсциссы в 2 раза.

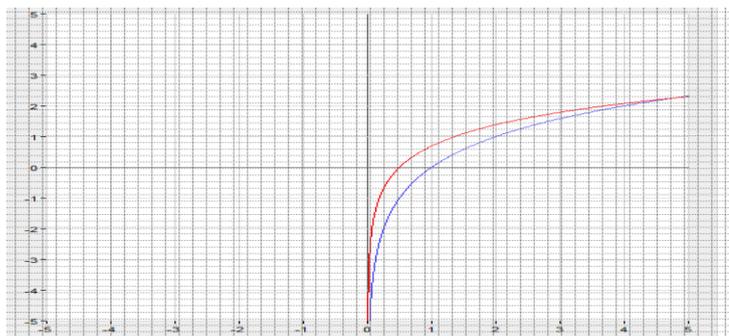


Рис.7.

**Сжатие графика вдоль оси абсцисс  $y = f(\beta x); \beta > 1$ .**

Для построения графика функции  $y = f(\beta x)$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и уменьшить его абсциссы в  $\omega$  раз при  $\beta > 1$ .

Пример

Построить график функции  $y = \sin 2x$

Построение

- а) построим график функции  $y = \sin x$ ;
- б) уменьшим абсциссы в 2 раза.

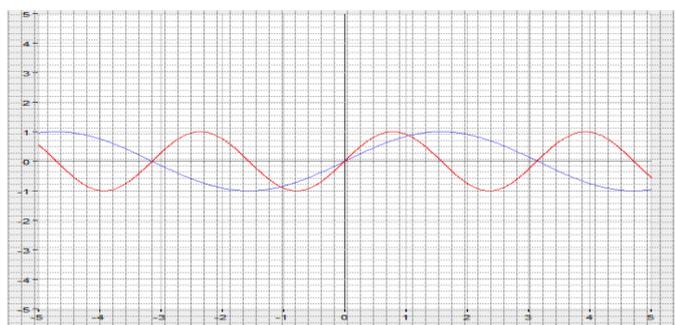


Рис.8

**Функции содержащие знак модуля.**

Для построения графика функции  $y = |f(x)|$  следует построить график функции  $y = f(x)$  и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отобразить относительно оси абсцисс.

Доказательство. Функцию  $y = |f(x)|$  будем рассматривать как совокупность двух функций:

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{где } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{где } f(x) < 0 \end{cases}$$

Чтобы построить график функции  $y = |f(x)|$ , достаточно построить график функции  $y=f(x)$ , и ту часть графика которая расположена в нижней полуплоскости, симметрично отобразить относительно оси  $Ox$ . Что и требовалось доказать.

Пример

Построить график функции  $y = |\log_3 x|$ ;

Построение

а) построим график функции  $y = \log_3 x$ ;

б) отобразим часть графика на интервале  $0 < x < 1$  относительно оси абсцисс.

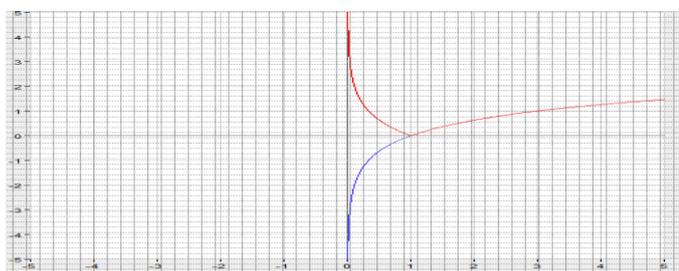


Рис.9

### Построение графика функции $y = f(|x|)$

Для построения графика функции  $y = f(|x|)$  следует построить график функции  $y = f(x)$  при  $x \geq 0$  и отобразить его относительно оси  $Oy$ .

Пример 14

Построить график функции  $y = \log_2 |x|$

Построение

а) построим для  $x \geq 0$  график функции  $y = \log_2 x$ ;

б) отобразим его относительно оси  $Oy$ .

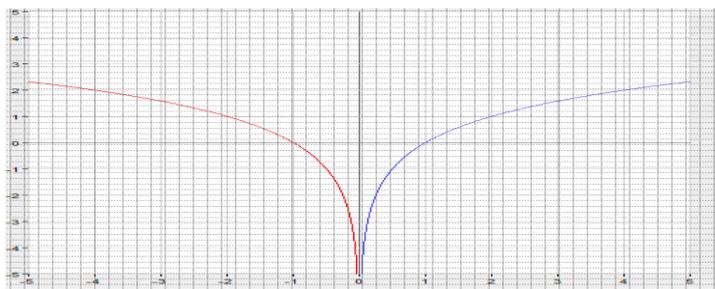


Рис.10

## **Заключение**

В результате проведения работы были решены все поставленные задачи, и, тем самым, достигнута основная цель.

В работе предлагаются

теоретическая часть, подкрепленная примерами с подробным решением; методические рекомендации к изучению теоретического материала, урокам решения задач, а также к урокам повторения, обобщения, систематизации и проверке знаний по теме «Преобразование графиков функций», позволяющие активизировать познавательную деятельность учеников.

Данная работа направлена на совершенствование учебного процесса, на применение на практике новых технологий обучения, основанных на принципах гуманизма, индивидуализации и дифференциации обучения и ориентированных на свободное развитие личности школьника.

## **Список литературы**

1. Бурмистрова Н.В., Старостенкова Н.Г. Функции и их графики. Учебное пособие. – Саратов: Лицей, 2003.
2. Бурмистрова Н.В., Старостенкова Н.Г. Функции и их графики. Учебное пособие. – Саратов: Лицей, 2003.
3. Дорофеев Г.В. и др. Математика: Алгебра. Функции. Анализ данных. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 2005.
4. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для 10-11 классов сред. школ. – М.: Просвещение, 1990.
5. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для 10-11 классов сред.школ.–М.: Просвещение, 1990.
6. Мордкович А.Г. Алгебра 7, 8, 9 класс. В двух частях. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений – М.: Мнемозина, 2004.
7. Мордкович А.Г. Алгебра 7, 8, 9 класс. В двух частях. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений – М.: Мнемозина, 2004.

8. Нелин Е.П. Алгебра в таблицах. Харьков: Мир детства, 2001.
9. Полный интерактивный курс «Функции и графики» для учащихся школ, лицеев, гимназий. ООО «Физикон», 2003.
10. <http://e-science.ru/math/theory/>