Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

наименование кафедры

Разработка программного продукта для решения задач многокритериальной портфельной оптимизации

АВТОРЕФЕРАТ

студента (ки) 3 курса 381 группы

направление 09.04.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета

Лягаевой Татьяны Владимировны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Доктор физ.-мат. наук	_______________	С. П. Сидоров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав.кафедрой

Зед. кафедрой, профессор, доктор физ.-мат. наук	_______________	С. И. Дудов
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2016

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В последние годы в связи с широкомасштабными изменениями экономики существенно повысился интерес к постановкам и решению задач теории инвестиций. Среди них значительное место занимают задачи оптимизации инвестиционных портфелей.

Проблема принятия решений при формировании инвестиционного портфеля постоянно находится в центре внимания. Действительно, выбирая из множества альтернатив распределения капитала между финансовыми активами, инвестор получит различные результаты, если под результатом понимать величину дохода, полученного в течение периода владения инвестиционным портфелем. Оптимальное распределение инвестируемого капитала должно обеспечивать наилучший результат.

В то же время, решение о структуре распределения капитала принимается часто в условиях неопределенности, когда доходность от вложения капитала в объекты инвестирования носит случайный характер. Тем самым появляется риск вложения капитала и задача оптимизации портфеля инвестиций должна ставиться и решаться в условиях наличия риска. При этом эффективная инвестиционная деятельность невозможна без использования специализированных информационных средств поддержки принятия решений.

В 1952 году Г. Марковиц впервые предложил математическую модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг на основе теоретико-вероятностной формализации понятия доходности и риска. Однако риск в модели Марковица оценивается при помощи стандартного отклонения, которое не учитывает асимметричность распределения доходности портфеля, а также "тяжелые хвосты". С тех пор было разработано много новых подходов к оценке риска. Однако и они вызывают споры, т.к. обладают своими особенностями и недостатками.

В данной работе особое внимание уделено моделям выбора оптимального портфеля, в которых каждый портфель характеризуется несколькими статистическими величинами.

Цель магистерской работы состоит в разработке программного продукта для решения задачи выбора оптимального портфеля на основе модели, использующую несколько мер риска.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

- Изучить математические модели формирования оптимального портфеля;
- Изучить язык программирования высокого уровня AMPL, созданный в Bell Laboratories с целью описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний;
- Реализовать на AMPL модели для решения задач многокритериальной портфельной оптимизации.

Магистерская работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, приложений.

В введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи.

В первой главе дается определение оптимального инвестиционного портфеля, ставится задача выбора оптимального портфеля, рассматриваются модели Марковица, CVaR и величина VaR.

Во второй главе описываются модели, использующие несколько мер риска, в частности, модель mean-variance-CVaR (MVC), в которой рассматривается многокритериальная задача оптимизации с тремя критериями: среднее значение доходности, дисперсия доходности, значение условного Value-at-Risk (CVaR).

В третьей главе содержится краткое введение в AMPL. Приведены начальные сведения о синтаксисе языка и реализация моделей, описанных в первых двух главах.

В заключении приводятся результаты проделанной работы.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследования, ставятся цели и задачи.

В первой главе дается определение оптимального инвестиционного портфеля, ставится задача выбора оптимального портфеля и рассматриваются, модели использующие одну меру риска, а именно:

- Модель Марковица;

Предположим, что инвестор может вложить свой капитал в покупку n различных видов ценных бумаг, сформировав тем самым портфель ценных бумаг. Пусть x_i – доля капитала инвестора, вложенная в актив i, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – полученный портфель. Введем обозначения:

μ_i – ожидаемая доходность ценной бумаги i;

σ_{ij} – ковариация между ценными бумагами i и j видов, $i, j = \overline{1,n}$, а $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ – стандартное отклонение ценной бумаги i вида;

d – желаемый уровень ожидаемой доходности.

Тогда модель Марковица в этих обозначениях примет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \geq d,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

- Модель CVaR

Предположим, что портфель R_x имеют T возможных доходностей $r_{1x}, \dots, r_{Tx}$ с вероятностями $p_1, \dots, p_T$, и $r_{ix} = \sum_j^n x_j r_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$ (r_{ij} – величина доходности ценной бумаги j при реализации сценария i). При описании данной модели, в дополнение к переменным $x_1, \dots, x_n$, определяющим размеры ценных бумаг в портфеле, задается еще $T+1$ переменная. Переменная v соответствует отрицательной части -квантиля распределения значений доходностей портфеля. В процессе решения данной оптимизационной задачи, оптимальное значение переменной v может быть использовано в качестве приближения для VaR_α и, в случае единственности решения, будет точно равно VaR_α. Остальные T переменные показывают величину отрицательного стандартного отклонения доходности портфеля -квантиля для каждого сценария $\forall i \in \{1, \dots, T\}$:

$$y_i = \begin{cases} -v - \sum_{j=1}^{n} x_j r_{ij}, \text{если} \sum_j^n x_j r_{ij} \le -v; \\ 0, \qquad \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда модель CVaR в этих обозначениях примет вид:

$$v + \frac{1}{\alpha T} \sum_{i=1}^{T} y_i \to \min,$$

$$-\sum_{j=1}^{T} r_{ij} x_j - v \le y_i, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$y_i \ge 0, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_j \mu_j \ge d,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Во второй главе описываются модели, использующие несколько мер риска. А именно:

- Модель Mean-Variance-Skewness;

Модель основана на использовании следующих критериев: математического ожидания, дисперсии и асимметрии доходности портфеля.

Предположим, что многомерная случайная величина $(R_1, \dots, R_n)$ распределена дискретно с заведомо известными вероятностями

$$p_t = P\{(R_1, \dots, R_n) = (r_{1t}, \dots, r_{nt})\}, t = 1, \dots, T.$$

Тогда математическое ожидание доходности ценной бумаги j

$$r_j = E[R_j] = \sum_{t=1}^{T} p_t r_{tj}.$$

Математическое ожидание доходности портфеля определяется как

$$E[R(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j,$$

а дисперсия портфеля

$$V[R(x)] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(R_j - r_j)x_j\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(R_j - r_j)(R_k - r_k)x_j x_k\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{tj} - r_j)(r_{tk} - r_k)x_j x_k = \sum_{t=1}^{T} p_t \left(\sum_{j=1}^{n}(r_{tj} - r_j)\, x_j\right)^2.$$

Аналогично находим значение куртозиса

$$k[R(x)] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(R_j - r_j)x_j\right)^3\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(R_j - r_j)(R_k - r_k)(R_h - r_h)\, x_j x_k x_h\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(r_{tj} - r_j)(r_{tk} - r_k)(r_{th} - r_h)\, x_j x_k x_h =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p_t \left(\sum_{j=1}^{n}(r_{tj} - r_j)\, x_j\right)^3.$$

Основываясь на данных равенствах, модель можно записать в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t {z_t}^3 \to max,$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t {z_t}^2 \le s^2,$$

$$\sum_{t=1}^{T} p_t z_t = r,$$

$$-z_t + \sum_{j=1}^{n} r_{tj} x_j = 0, t = 1, \dots, T, x \in X = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0\right\}.$$

- Модель Mean-Variance-CVaR

Для задачи выбора портфеля, как и в первой главе, рассмотрим T временных интервалов и n активов. Будем , как и ранее, использовать те же обозначения.

Тогда модель примет вид:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_j \mu_j \geq d,$$

$$\nu + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{T} p_i y_i \leq \mathrm{z},$$

$$-\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j - \nu \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$y_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Минимизация производится по переменным $\nu, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_T$.

В третьей главе представлено краткое введение в AMPL, приведены начальные сведения о синтаксисе языка, приведен принцип реализации моделей, описанных в предыдущих глава. А также на основе входных численных значений параметров был осуществлен расчет по нахождению структуры оптимального портфеля, построены графики ожидаемой доходности портфелей ценных бумаг на внутривыборочных и вневыборочных данных (в соответствии с рисунками 1 и 2). На основе полученных результатов сделан вывод: большему значению ожидаемой доходности инвестиций соответствует и большее значение риска вложений, значит, чтобы получить высокий доход, инвестор должен принимать и высокий уровень риска, либо получить небольшой доход, и при этом уровень риска будет принимать минимальное значение.

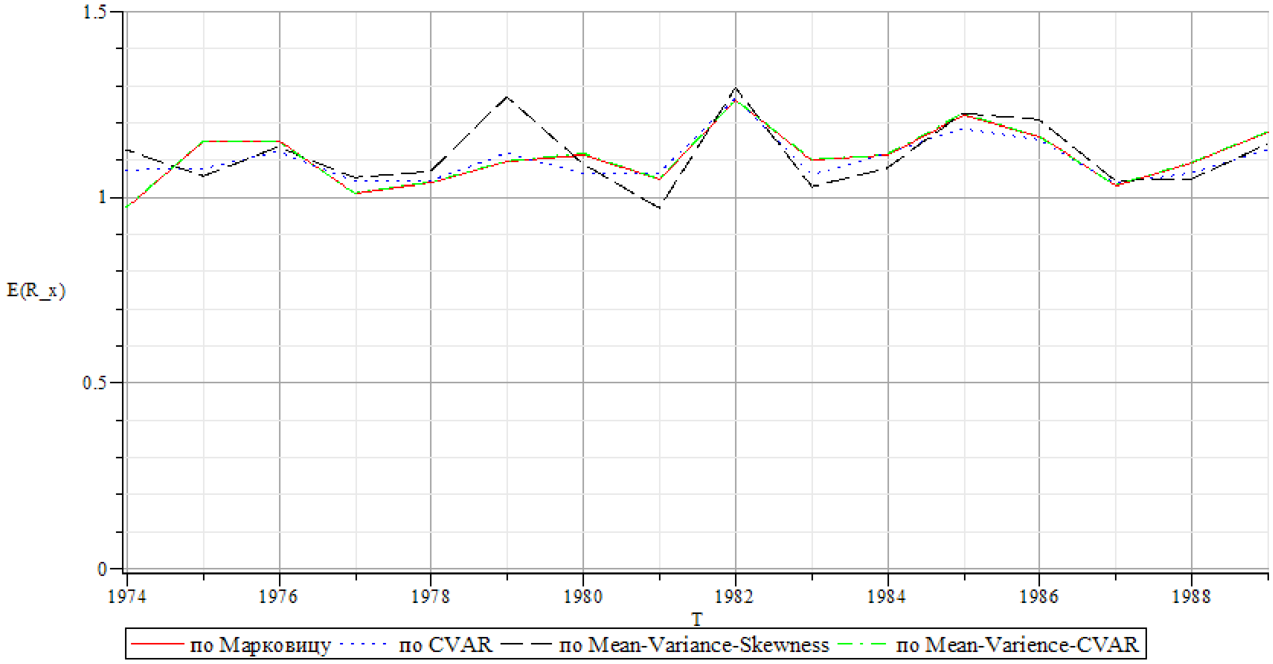

Рисунок 1 – Ожидаемая доходность портфелей на внутривыборочных данных.

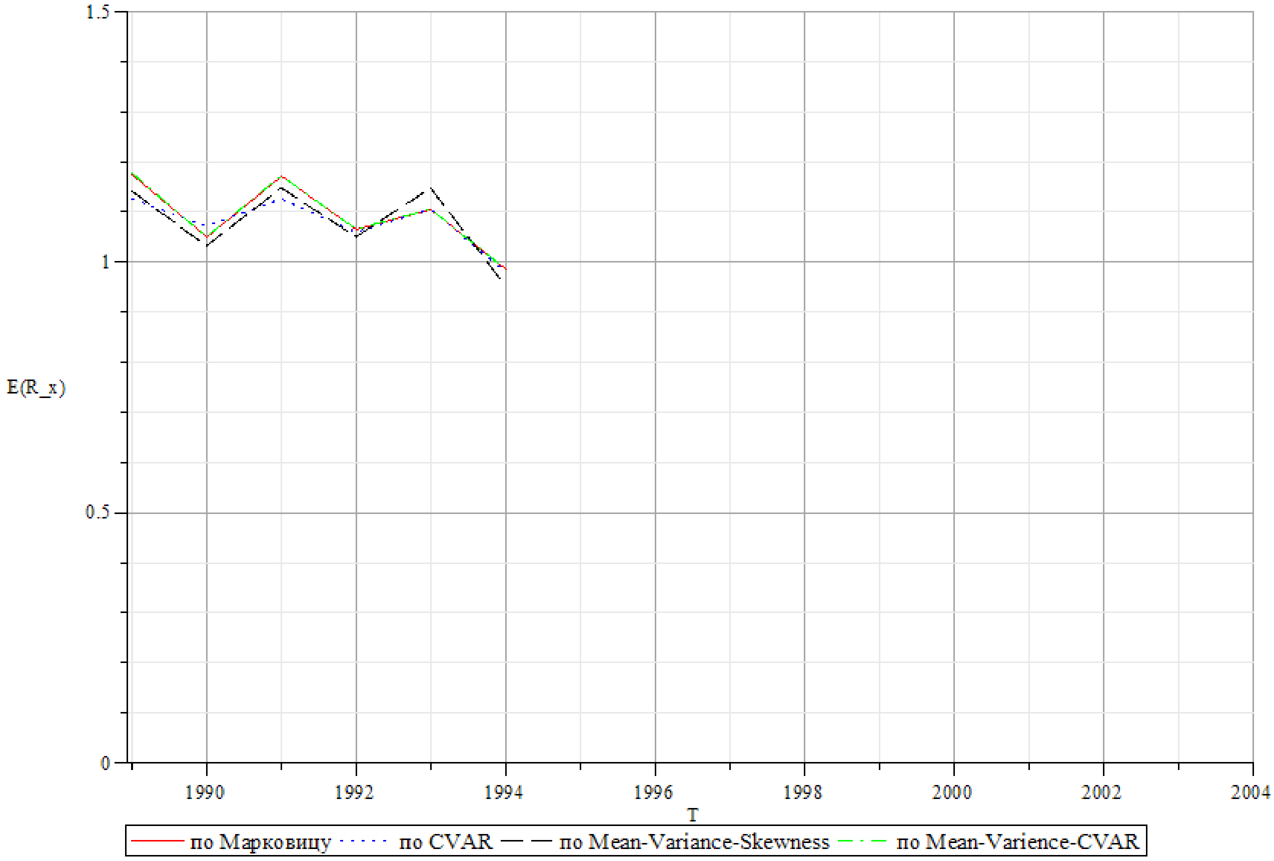

Рисунок 2 – Ожидаемая доходность портфелей на вневыборочных данных.

Заключение

В магистерской работе рассмотрены задачи оптимизации инвестиционных портфелей на основе двух, трех статистических величин. Разработан программный продукт для решения задачи многокритериальной портфельной оптимизации на ЭВМ на языке программирования высокого уровня AMPL.

В заключение хотела бы подчеркнуть, что в процессе выполнения магистерской работы на языке программирования высокого уровня AMPL обнаружены достоинства: подобие его синтаксиса математической записи задач оптимизации, что позволяет дать очень краткое и легко читаемое определение задач математического программирования (т.е. близко к естественной математической записи); удобное средство для решения оптимизационных задач, т.к. дает возможность описать сложные модели оптимизации с различными логическими условиями, с использованием сложных систем индексации переменных и ограничений; высокая модульность. В заключении подводятся итоги проделанной работы.

Список использованных источников

1. Markowitz H. M. Portfolio selection // J. Finance. 1952. Vol. 7, no. 1. P. 77–91.
2. Sharpe W. F. Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk // J. of Finance. 1964. Vol. 19, no. 3. P. 425–442.
3. Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47, no. 1. P. 13–37.
4. Канеман Д., Тверски А. Рациональный выбор, ценности и фреймы // Психологический журн. 2003. Т. 24, № 4. С. 31–42.
5. Harvey C., Liechty R. J., Liechty M. W., Mueller P. Portfolio selection with higher moments [Electronic source]. Available at: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=634141 (accessed 08 January 2016).
6. Лобанов А. А., Чугунов А. В. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. М. : Альпина Паблишер, 2003. 785 с.
7. Laurent J. Sensitivity analysis of risk measures for discrete distributions [Electronic source]. Available at: http://laurent.jeanpaul.free.fr/ (accessed 17 November 2015).
8. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall // J. Banking and Finance. 2002. Vol. 26. P. 1487–1503.
9. Rockafellar R. T., Uryasev S. Optimization of conditional Value-at-Risk // J. Risk. 2000. Vol. 2. P. 21–42.
10. Rockafellar R. T., Uryasev S. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions // J. Bank. Finance. 2002. Vol. 26, no. 7. P. 1443–1471.
11. Konno H., Suzuki K. A mean-variance-skewness portfolio optimisation model // J. Oper. Res. Soc. Jpn. 1995. Vol. 38, no. 2. P. 173–187.
12. Roman D., Darby-Dowman K., Mitra G. Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach // Quantitative Finance. 2007. P. 443–458.
13. Steuer R. Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Application. New York : John Wiley & Sons, 1986. 546 p.
14. Steuer R., Na P. Multiple criteria decision making combined with finance : a categorized bibliographic study // Eur. J. Oper. Res. 2003. Vol. 150. P. 496–515.
15. Wang J. Mean-variance-VaR based portfolio optimisation [Electronic source]. Available at: http://gloria-mundi.com/?from=gloriamundi.org/ (accessed 22 November 2015).

16. Jorion P. Portfolio optimisation with tracking-error constraints // Financ. Analysts J. 2003. Vol. 59, no. 5. P. 70–82.
17. Krokhmal P., Palmquist J., Uryasev S. Portfolio optimisation with conditional Value-at-Risk objective and constraints // J. Risk. 2002. Vol. 4, no. 2. P. 43–68.
18. Fourer R., Gay D. M., Kernighan B. W. AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming. London : Duxbury Press, Brooks, Cole Publishing Company, 2002.
19. AMPL – Wikipedia, The Free Encyclopedia [Electronic source]. Available at: http://en.wikipedia.org/wiki/AMPL (accessed: 10 November 2015).
20. Сидоров С.П., Коробов Е.А., Файзлиев А.Р. Практикум работы в среде AMPL // Учеб. Пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011