Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории упругости
и биомеханики

Изгиб композиции из пологой цилиндрической оболочки и пластины под действием нормальной нагрузки

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Кравчука Владимира Владимировича

Научный руководитель
д.т.н., профессор ________________________ Г.Н. Белосточный
дата, подпись

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Л.Ю. Коссович
дата, подпись

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Выпускная квалификационная работа выполнена на тему «Изгиб композиции из пологой цилиндрической оболочки и пластины под действием нормальной нагрузки.

Объект исследования: тонкостенная оболочечная конструкция из двух элементов под действием кусочно-непрерывной нагрузки.

Задача исследования: определить функции прогиба для сложной пологой оболочки, состоящей из двух элементов.

Актуальность: В известных областях техники используются элементы в виде композиций из различных по геометрическим свойствам оболочек. Условия эксплуатации предусматривают воздействие на такие конструкции сингулярных силовых нагрузок, быстропеременных температурных полей и т.д. Прогнозирование упругого поведения таких конструкций под действием силовых нагрузок всегда представляла интерес для инженерной практики. По этой причине разработка математических моделей композиции из оболочек и пластин, позволяющих на их основе получать предельно точные количественные результаты является актуальной задачей.

В данной работе рассматривается композиция из двух элементов - пологая цилиндрическая оболочка и пластинка одинаковых толщин, гладко сопряженные между собой. Используется подход, позволяющий трактовать такую конструкцию как оболочку переменной кривизны. Что позволило получать приближенные аналитические решения допускающих не сложную алгоритмизацию для получения количественных результатов.

Цели работы:

- Построить континуальную модель композиции из двух элементов *(цилиндрическая пологая оболочка – пластинка),* срединные поверхность и плоскость которых гладко сопряжены вдоль одной из координатных прямых;

- Исходя из дифференциального вариационного принципа Лагранжа получить систему сингулярных дифференциальных уравнений равновесия композиции в компонентах поля перемещений;
- Найти приближенные аналитические выражения для компонент поля перемещений составной конструкции под действием кусочно-непрерывной нагрузки и шарнирном закреплении сторон;
- Разработать алгоритм для численной реализации полученных решений системы сингулярных дифференциальных уравнений равновесия и провести количественный анализ влияния геометрических параметров на функцию прогиба. Провести анализ влияния нагрузки, геометрических параметров композиции на поле перемещений.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 32 листах машинописного текста, содержит 2 рисунка и 5 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается важность задачи исследования тонкостенных оболочечных конструкций, излагаются и описываются основные методы, используемые в наше время. Так же обозреваются основные вехи в изучении тонкостенных оболочечных конструкций.

В первой главе рассматриваются тонкостенные прямоугольные в плане конструкции, составленные из элементов в виде пологой цилиндрической оболочки и пластины одинаковой толщины. Задаётся срединная поверхность такой сложной оболочки в виде

$$Z(x) = f_1(x) \ + [f_2(x) - f_1(x)] H(x - x_1) \qquad (1)$$

где $H(x - x_i)$ - сдвинутые функции Хевисайда, а функции $f_j(x)$ удовлетворяют условиям

при $x = 0 \qquad f_1(0) \ = 0$

при $x = x_1 \qquad f_1(x_1) \ = f_2(x_1) = g^* \qquad (2)$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{df_2}{dx} = 0 \ ,$$

при $x = a \qquad f_2(a) \ = g^* \qquad (3)$

и главные кривизны r и t поверхности $z = z(x)$

$$\text{r(x)} = \frac{d^2 z}{dx^2} = -2\frac{g^*}{x_1^2} + \frac{2g^*}{x_1^2} H(x - x_1), \ \text{t} = 0. \qquad (4)$$

Система сингулярных дифференциальных уравнений равновесия составной конструкции получена из дифференциального вариационного принципа Лагранжа $\delta I = 0$ и в компонентах поля перемещения $\overline{U}(u, v, w)$ имеет вид:

$$l_{11}u + l_{12}V - [2\frac{g^*}{x_1^2} w\delta(x - x_1) + (-2\frac{g^*}{x_1^2} + 2\frac{g^*}{x_1^2} H(x - x_1))\frac{\partial w}{\partial x}] = 0\,,$$

$$l_{21}u + l_{22}V - v[-2\frac{g^*}{x_1{}^2} + 2\frac{g^*}{x_1{}^2}H(x-x_1)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad (5)$$

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\lambda^1}{\lambda}[4(\frac{g^*}{x_1{}^2})^2 - 8(\frac{g^*}{x_1{}^2})^2 H(x-x_1) + 4(\frac{g^*}{x_1{}^2})^2 H(x-x_1)]w -$$
$$-\frac{\lambda^1}{\lambda}[-2\frac{g*}{x_1^2} + \frac{2g*}{x_1^2}H(x-x_1)](\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{q(x,y)}{\lambda},$$

где l_{ij} - дифференциальные операторы

$$l_{11}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$l_{12} = \frac{1+v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \qquad l_{21} = \frac{1+v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$l_{22} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Во второй главе рассматривается краевая задача для составной оболочки под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки

$$q(x,y) = q_0(x,y)H(x-x_1), \qquad (6)$$

на краях которой выполняются условия шарнирного закрепления

при $x = 0, \quad x = a \quad W = 0, \quad M^{11} = 0, \quad T^{11} = 0, \qquad V = 0$

при $y = 0, \quad y = b \quad W = 0, \quad M^{22} = 0, \quad T^{22} = 0, \qquad U = 0$ (*)

которые на оснований равенств

$$M^{11} = -\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}[w,_{11} + vw,_{22}], \qquad M^{22} = -\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}[w,_{22} + vw,_{11}]$$

$$T^{11}=\frac{Eh}{1-v^2}[u,_1+vV,_2-r(x)w\ ],\qquad T^{22}=\frac{Eh}{1-v^2}[V,_2+vu,_1-vr(x)w\ ]$$

перепишутся в компонентах поля перемещений $\bar{u}$ (u,v,w) в виде

при $x=0$, $x=a$ $\quad W=0$, $\quad V=0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}-r(x)W=0 \tag{7}$$

при $y=0$, $y=b$ $\quad W=0$, $\quad U=0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}+v\frac{\partial U}{\partial x}-vr(x)W=0 \tag{8}$$

Функции U, V и W, задаются в виде двойных тригонометрических рядов тождественно удовлетворяющих всем краевым условиям (7), (8)

$$\mathrm{U(x,\,y)}=\sum_{k,m}U_{km}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$\mathrm{V(x,\,y)}=\sum_{k,m}V_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},$$

$$\mathrm{W(x,\,y)}=\sum_{k,m}W_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{9}$$

Элементы α_{ij} расширенной матрицы линейной неоднородной алгебраической системы относительно коэффициентов аппроксимирующих рядов (9) получены на основании метода Галёркина и имеют вид:

$$\alpha_{11}=-(\frac{\pi^2}{4a}b+\frac{1-v}{8}\frac{\pi^2}{b}a),$$

$$\alpha_{12}=-\frac{1+v}{8}\pi^2,$$

$$\alpha_{13}=\frac{g^*}{x_1{}^2}b[\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_1}{a})+\frac{\pi}{2a}(a-x_1-\sin(\frac{2\pi x_1}{a})\frac{a}{2\pi})-\frac{\pi}{2}],$$

$$\alpha_{14}=0,$$

$$\alpha_{21} = -\frac{1+\nu}{8}\pi^2,$$

$$\alpha_{22} = -\frac{1-\nu}{8a}\pi^2 b,$$

$$\alpha_{23} = 2\nu\frac{g^*}{x_1{}^2}\frac{\pi}{b}[\frac{ab}{4} - \frac{b}{4}(a - x_1 + \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\frac{a}{2\pi})],$$

$$\alpha_{24} = 0,$$

$$\alpha_{31} = \frac{\lambda'}{\lambda}2\frac{g^*}{x_1{}^2}\frac{b}{4}(2\pi - \frac{\pi}{a}x_1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi x_1}{a}),$$

$$\alpha_{32} = \frac{\lambda'}{\lambda}2\frac{g^*}{x_1{}^2}\frac{b}{4}\nu(\frac{\pi}{b}x_1 - \frac{a}{2b}\sin(\frac{2\pi x_1}{a})),$$

$$\alpha_{33} = \frac{\pi^4}{4}\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2} + \frac{\lambda'}{\lambda}4\frac{g^{*2}}{x_1{}^4}[\frac{ab}{4} - \frac{b}{4}(a - x_1 + \sin(\frac{2\pi x_1}{a})\frac{a}{2\pi}],$$

$$\alpha_{34} = \frac{4}{\lambda}\frac{ab}{\pi^2}q_0, \qquad (10)$$

В третьей главе проводится количественный анализ влияния геометрических параметров на функцию прогиба. Результаты расчетов представлены в виде таблицы. Отмечается, что во всех случаях увеличение стрелы подъёма композиции над её планом ведёт к уменьшению прогиба упругой системы.

Таблица 1 – Влияние геометрических параметров на функцию прогиба

g*/h	W(a/2, b/2)
1	0.0202
5	0.0142

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Построено уравнение срединной поверхности композиции из двух элементов *(цилиндрическая пологая оболочка - пластинка)*, что позволило трактовать упругую систему как оболочку переменной кривизны.

2) Исходя из интегрального вариационного принципа Лагранжа выведена система уравнений равновесия композиции в компонентах поля перемещений.

3) Рассмотрена конкретная краевая задача. Найдена аппроксимирующая система функций, тождественно удовлетворяющая краевым условиям в виде шарнирного опирания, что позволило при интегрировании сингулярной системы дифференциальных уравнений статики использовать процедуру Галеркина и получить приближенное аналитическое решение для композиции под действием кусочно-непрерывной нормальной нагрузки.

4) На основании метода Галеркина получена расширенная матрица неоднородной алгебраической системы относительно коэффициентов аппроксимирующих рядов. Проведен количественный анализ влияния геометрических параметров на функцию прогиба составной оболочечной конструкции в первом приближении.