Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и
информационных технологий

Последовательная декомпозиция автоматов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Пряхина Глеба Романовича

Научный руководитель

доцент, каф. ДМиИТ ______________ И.П. Мангушева

подпись, дата

Зав. кафедрой

к. ф.-м.н., доцент ______________ Л.Б. Тяпаев

подпись, дата

Саратов 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для получения информации о процессе работы некоторой математической системы удобно описание процесса и результата её работы в табличном виде. Изучением таких описаний занимается раздел дискретной математики, называемый теорией автоматов, в котором подобные описания именуются абстрактными автоматами.

Абстрактный автомат – математическая абстракция, являющаяся моделью дискретного устройства, которое в каждый момент времени находится в одном состоянии из множества возможных. На вход автомата подаются символы одного алфавита, на выходе автомата появляются символы другого алфавита, являющиеся формализацией результата работы устройства.

Так как математическая абстракция может в отдельных случаях получиться довольно большой и сложной для использования, необходим механизм, позволяющий представить исходную абстракцию в виде композиции нескольких абстракций, которые облегчают изучение и работу с абстракцией. Таким механизмом является последовательная декомпозиция автомата.

Последовательная декомпозиция автомата строится по разбиению π, определённому на множестве S состояний автомата, и представляет соединение фактор – автоматов, копирующих поведение исходного автомата с точностью до блоков разбиения π.

Представление автомата (системы) в виде соединения автоматов с меньшим числом состояний, целесообразно, так как в случае возникновения неисправности в какой – либо из компонент, то производится замена только неисправной компоненты, а все остальные остаются без изменений. Кроме того, простые компоненты удобно имеют большую надёжность и большую лёгкость в диагностировании неисправностей.

Целью данной работы является решение задачи: нахождения и реализации алгоритма последовательной декомпозиции автомата.

Для достижения цели необходимо:

- изучить теоретический материал необходимый для решения задачи;
- используя изученную методику, вручную построить последовательную декомпозицию, для заданного автомата;
- реализовать алгоритм, используя выразительные средства языка высокого уровня;

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников. Во введении приводятся общие сведения, цели и задачи работы. Первая глава содержит теоретическую часть работы: в первой главе даются основные определения теории автоматов; во второй главе представлена самостоятельная декомпозиция автомата, с использованием методов, описанных в первой глав; в третьей главе приведён результат разработки этапов построения конгруэнции автомата, описаны шаги построения последовательной декомпозиции и приведен пример результата работы программы построения образующей конгруэнции и последовательной декомпозиции автомата. В заключении сделаны выводы о проделанной работе, описаны её результаты. Список использованной литературы содержит источники, на которые приводятся ссылки в работе.

1 Основные определения теории автоматов

1.1 Конечные автоматы

Конечный автомат – устройство, работающее в дискретном времени, иначе тактах. На вход конечного автомата на каждом такте поступает один из возможных входных сигналов, а на его выходе появляется выходной сигнал, являющийся функцией его текущего состояния и поступившего входного сигнала. Внутреннее состояние автомата также меняется. Такты работы определяются либо принудительно, посредством синхросигналов, либо асинхронно – по приходу сигнала.

Конечным детерминированным инициальным автоматом Мили называют абстрактную систему

$$(S, X, Y, s_0, \delta, \lambda)$$

где S, X, Y называются соответственно множествами состояний, входных и выходных сигналов, $s_0 \in S$ – начальное состояние автомата, $\delta : S \times X \rightarrow S$ – функция переходов $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ – функция выходов.

Автоматом состояний В называют тройку (S, X, δ), где S, X, δ - имеют тот же смысл, что и для конечного детерминированного инициального автомата Мили.

Автомат состояний является основной частью автомата Мили - автомат состояний реализует механизм запоминания информации. Автомат Мили можно представить в виде автомата состояний N с навешенной на его выход функцией выходов λ.

1.2 Разбиение множества, операции на множестве

Разбиением множества N называют множество непустых, непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с N.

Элементарное разбиение множества – разбиение, в котором в один блок объединены два различных элемента (r, s) исходного множества, а все остальные блоки этого разбиения состоят из одного элемента.

Множество всех разбиений множества N обозначим Π(N).

На множестве П(N) определим операции **сложения** и **умножения**.

Результатом операции **умножения** разбиений множества, является разбиение, блоками которого являются пересечения блоков исходных разбиений.

Результатом **сложения** является разбиение, блоками которого являются объединения пересекающихся блоков исходных разбиений.

Такие операции обладают свойствами идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, то есть:

a) $\pi \times \pi = \pi$; $\pi + \pi = \pi$; свойство идемпотентности
b) $\pi \times \xi = \pi\xi$; $\pi + \xi = \xi + \pi$; свойство коммутативности
c) $(\pi \times \xi) \times \tau = \pi \times (\xi \times \tau)$; $(\pi + \xi) + \tau = \pi + (\xi + \tau)$; свойство ассоциативности

Можно сказать, что разбиения ρ и π находятся в отношении $\rho \leq \pi$, если блоки разбиения ρ являются подблоками блоков разбиения π.

Следовательно, $\rho \leq \pi$.

Среди всех элементов множества П(N), существуют два разбиения, одно из которых состоит из одного блока, содержащего все элементы из N, второе разбиение содержит в себе разбиения всего с одним элементом из N.

Первое разбиение называют наибольшим разбиением и обозначают I.

Второе разбиение называют наименьшим разбиением и обозначают 0.

Разбиение I и 0 играют роль единицы и нуля в алгебре разбиений.

1.3 Универсальная алгебра, конгруэнция универсальной алгебры, конгруэнция на множестве состояний автомата, замыкание

Универсальной алгеброй называется множество M вместе с набором операций $\sum = \{\varphi_1, \ldots \varphi_s\}$, φ_i: $M^{ni} \rightarrow M$, где n_i – арность операции φ_i.

Множество M называется носителем алгебры, $\sum$ называются сигнатурой, а вектор арностей операций $< n_1, \ldots, n_s >$ называется типом алгебры.

Конгруэнцией называется разбиение π на носителе M алгебры

$<M; \varphi_1, \dots \varphi_s>$ такое, что

$$(\forall i \in 1 \dots s)(\forall a_j, b_j \in M) ([a_j]_\pi = [b_j]_\pi \rightarrow [\varphi_i(a_1, \dots, a_r)]_\pi = [\varphi_i(b_1, \dots, b_r)]_\pi),$$

где $[a]_\pi$ – обозначает блок разбиения π, содержащий элемент а.
Таким образом, конгруэнцией алгебры называется разбиение, согласованное с операциями алгебры.

Для применения выводов, полученных в теории универсальных алгебр к теории автоматов, рассмотрим конечный автомат, у которого определена только функция переходов. Такой автомат можно рассматривать как универсальную алгебру, у которой сигнатурой является множество функций переходов, по одной для каждого входного сигнала, а носителем – множество состояний автомата. То есть можно рассмотреть автомат $A = (S, X, \{\delta_x\})$, где S – множество состояний автомата, X – множество входных сигналов, $\{\delta_x\}$ – множество функций переходов такое, что $(\forall\ x \in X)$, $(\delta_x\colon S \rightarrow S)$.

Конгруэнцией автомата называется разбиение π на множестве состояний конечного автомата A такое, что под воздействием любого входного сигнала автомат из двух любых состояний, принадлежащих одному и тому же блоку разбиения π, переходит в два других состояния, вместе принадлежащих одному и тому же произвольному блоку этого разбиения, то есть

$$(\forall\ x \in X)\ (\forall\ s, r \in S)\ ([s]_\pi = [r]_\pi \rightarrow [\delta_x(s)]_\pi = [\delta_x(r)]_\pi).$$

Замыканием $[[\pi]]_A$ разбиения π на множестве состояний автомата $A=(S, X, \delta)$называют такую конгруэнцию, что $\pi \leq [[\pi]]_A$, причём $[[\pi]]_A$ – минимальная конгруэнция A, обладающая этим свойством.

Конгруэнция π конечного автомата $A = (S, X, \delta)$ определяет фактор автомат $A/\pi = (\pi, X, \delta_\pi)$, состояниями которого являются блоки разбиения π, а функция переходов δ_π для каждого входного сигнала $x \in X$ определяется:

$$(\forall\ x \in X)\ (\forall\ s \in S)\ (\ \delta_\pi([s]_\pi, x) = [\delta\,(s, x)]_\pi).$$

Воспользовавшись определением образующих решёток конгруэнций автомата из источника [3], определим. **Образующей конгруэнцией** автомата, называют замыкание $[\rho[r,\ s]]_A$ построенное для пары (r, s) различных состояний автомата

Разбиением ρ, **ортогональным конгруэнции** π, называют любое разбиение ρ такое, что результат умножения разбиений будет равен разбиению 0.

Воспользовавшись определением множества Con(A) из источника [2], определим. **Множество всех конгруэнций автомата состояний** A обозначим **Con(A)**. Con(A) – решётка. Con(A) - упорядоченное множество, ≤ отношение порядка на нём, а каждое подмножество множества Con(A) имеет точную верхнюю и нижнюю грань.

Любая конгруэнция θ автомата состояний A является объединением в решётке Con(A) подходящего набора конгруэнций $\theta = \vee\{\,\theta(s_1, s_2) \mid (s_1, s_2) \in \theta\}$, где $\theta(s_1, s_2)$ обозначает наименьшую из конгруэнций, содержащих пару (s_1, s_2). Не все образующие конгруэнции будут неразложимыми элементами решётки Con(A). С другой стороны, всякая неразложимая конгруэнция будет образующей. Полагая

$$\theta^*(s1, s2) = \begin{cases} \theta(s_1, s_2), \text{ если } \theta(s_1, s_2) \text{ неразложима} \\ \Delta, \text{в противном случае} \end{cases}$$

получаем, что для любой $\theta \in$ Con(A) имеет место следующее представление $\theta = \vee\{\,\theta^*(s_1, s_2) \mid (s_1, s_2) \in \theta\}$.

1.4 Алгоритм поиска образующей конгруэнции конечного автомата

Для нахождения конгруэнций конечного автомата необходимо построить замыкания элементарных разбиений множества состояний автомата, затем отсеять тривиальные конгруэнции.

Вход: множество X входных символов, множество S состояний автомата, таблица переходов автомата A, пара состояний (r, s).

Выход: наименьшая конгруэнция, отождествляющая в одном классе пару (r, s).

Рассмотрим алгоритм пошагово:

1. Положим $\pi_0 = \pi$. Начальное разбиение для последующих шагов

алгоритмов.

2. Для $i \geq 0$ определим $\pi_{i+1} = \pi_i + \sum_{[r]\pi i=[s]\pi i}\sum_{x\epsilon X} \rho(\delta(r, x), \delta(s, x))$,

где $\rho(r, s)$ – элементарное разбиение, содержащее пару (r, s)

То есть каждый последующий шаг – сумма предыдущего разбиения и разбиения $\rho(\delta(r, x), \delta(s, x))$ для каждой пары тех состояний, в которые автомат переходит из каждой пары состояний r и s, принадлежащих одному блоку разбиения полученному на предыдущем шаге, для каждого входного сигнала.

3. Замыкание $[[\pi]]_A$ найдено, если $\pi_{i+1} = \pi_i$ [3].

1.5 Нахождение ортогональной конгруэнции

Для нахождения ортогональной конгруэнции конечного автомата необходимо пометить элементы блоков разбиения π, числами 1, 2, …, n и объединить элементы, помеченные одинаковыми числами в один блок [4].

Вход: разбиение π.

Выход: разбиение ρ.

Рассмотрим алгоритм пошагово:

1. Пометим элементы блоков разбиения π, числами 1, 2, …, n.
2. Объединим элементы с одинаковыми пометками в один блок.

1.6 Последовательная декомпозиция автоматов

Теорема (о существовании последовательной декомпозиции).

Если конечный автомат имеет нетривиальную конгруэнцию, то для него существует последовательная декомпозиция [2].

Схематичное изображение реализации последовательного соединения автоматов A_1 и A_2 отображено на рисунке 1.

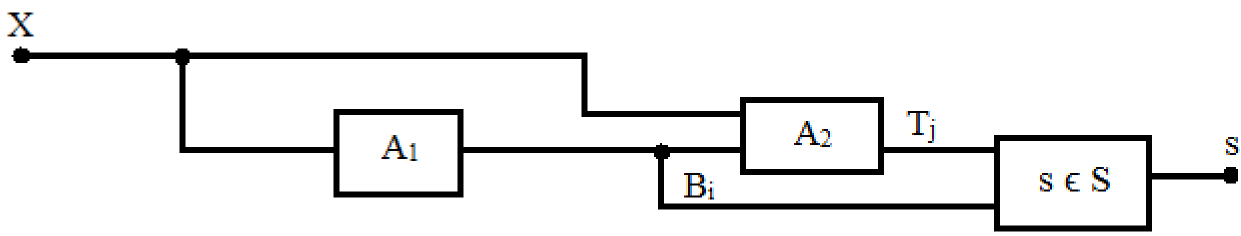


Рисунок 1 – Схема последовательного соединения автоматов A_1 и A_2

2 Построение последовательной декомпозиции

2.1 Нахождение образующей конгруэнции автомата для заданной пары

Для автомата A найти конгруэнции для пар (1,3) и (2,6), таблица переходов/выходов автомата A отображена на таблице 1.

Таблица 1 – Таблица переходов/выходов автомата A

A	a	b
1	2/α	8/ γ
2	3/β	8/ α
3	5/ α	4/γ
4	7/ β	8/ β
5	1/ β	4/ β
6	1/α	8/ γ
7	7/β	6/ α
8	7/ α	4/γ

Найдём конгруэнцию для пары (1, 3)

$\pi_0 = \rho(1, 3) = \{<1, 3>, <2>, <4>, <5>, <6>, <7>, <8>\}$

$\pi_1 = \{<1, 3>, <2, 5>, <4, 8>, <6>, <7>\}$

$\pi_2 = \pi_1 = \{<1, 3>, <2, 5>, <4, 8>, <6>, <7>\}$

Поскольку $\pi_2 = \pi_1$ работа алгоритма окончена.

Найдём конгруэнцию для пары (2, 6)

$\pi_0 = \rho(2, 6) = \{<1>, <2, 6>, <3>, <4>, <5>, <7>, <8>\}$

$\pi_1 = \{<1, 3>, <2, 6>, <4>, <5>, <7>\}$

$\pi_2 = \{<1, 3>, <2, 5, 6>, <4, 8>, <7>\}$

$\pi_3 = \{<1, 3>, <2, 5, 6>, <4, 8>, <7>\}$

Поскольку $\pi_3 = \pi_2$ работа алгоритма окончена.

2.2 Построение ортогональной конгруэнции

Для нахождения конгруэнции ортогональной конгруэнции, порождённой парой (2, 6) выберем произвольное разбиение, ρ для которого будет выполняться: $\pi \times \rho = 0$

Разбиение 0 = {<1>,<2>,<3>,<4>,<5>,<6>,<7>,<8>}

Разбиение ρ строится с использованием метода описанного в пункте 1.5. Конгруэнция: π_3 = {<1, 3>, <2, 5, 6>, <4, 8>, <7>}

Пометим элементы блоков:

$\pi = \{<1_1, 3_2>, <2_1, 5_2, 6_3>, <4_1, 8_2>, <7_1>\}$

Объединим элементы с одинаковыми пометками в блоки:

ρ = {< 1, 2, 4, 7 >, < 2, 3, 8 >, < 6 >}

2.3 Построение последовательной декомпозиции

Для построения последовательной декомпозиции пометим блоки разбиения π_3 B_i, i = 1, 2…

$\pi_3 = \{<1, 3>, <2, 5, 6>, <4, 8>, <7>\} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

Таблица переходов автомата в таком случае будет иметь вид:

Таблица 2 – Таблица переходов автомата состояний A/π_3

A/π_3	a	b
B_1	B_2	B_3
B_2	B_1	B_3
B_3	B_4	B_3
B_4	B_4	B_2

Для построения A/ρ перепишем таблицу переходов A, заменяя состояния соответствующими классами разбиения ρ.

Классы разбиения ρ = {< 1, 2, 4, 7 >, < 3, 5, 8 >, < 6 >} = $\{T_1, T_2, T_3\}$.

Таблица переходов автомата с учётом классов разбиения ρ отображена на таблице 3.

Таблица 3 – Таблица переходов автомата состояний А/{π3 × ρ}

А/{π3 × ρ}			a	b
B_1	1	T_1	T_1	T_2
B_2	2	T_1	T_2	T_2
B_1	3	T_2	T_2	T_1
B_3	4	T_1	T_1	T_2
B_2	5	T_2	T_1	T_1
B_2	6	T_3	T_1	T_2
B_4	7	T_1	T_1	T_3
B_3	8	T_2	T_1	T_1

Построим таблицу переходов автомата А/ρ, она отображена на таблице 4.

Таблица 4 – Таблица переходов автомата состояний А/ρ

А/ρ	B_1a	B_1b	B_2a	B_2b	B_3a	B_3b	B_4a	B_4b
T_1	T_1	T_2	T_2	T_2	T_1	T_2	T_1	T_3
T_2	T_2	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	—	—
T_3	—	—	T_1	T_2	—	—	—	—

Последовательное соединение автоматов А/π_3 и А/ρ реализует автомат А.

3 Программная реализация декомпозиции автомата

Для реализации последовательной декомпозиции автомата необходимо выполнить несколько предварительных шагов, таких как : поиск образующей конгруэнции, поиск ортогональной конгруэнции, построение таблиц переходов автомата в соответствии с образующей и ортогональной конгруэнциями. Для реализации алгоритма поиска образующей конгруэнции, используем алгоритм, описанный в пункте 1.4, поскольку алгоритм в шаге раскрыт недостаточно ясно, необходимо разделить этот шаг на подшаги.

После выполнения алгоритма поиска образующей конгруэнции, необходимо найти ортогональную конгруэнцию, для этого достаточно выполнить действия описанные в 1.5.

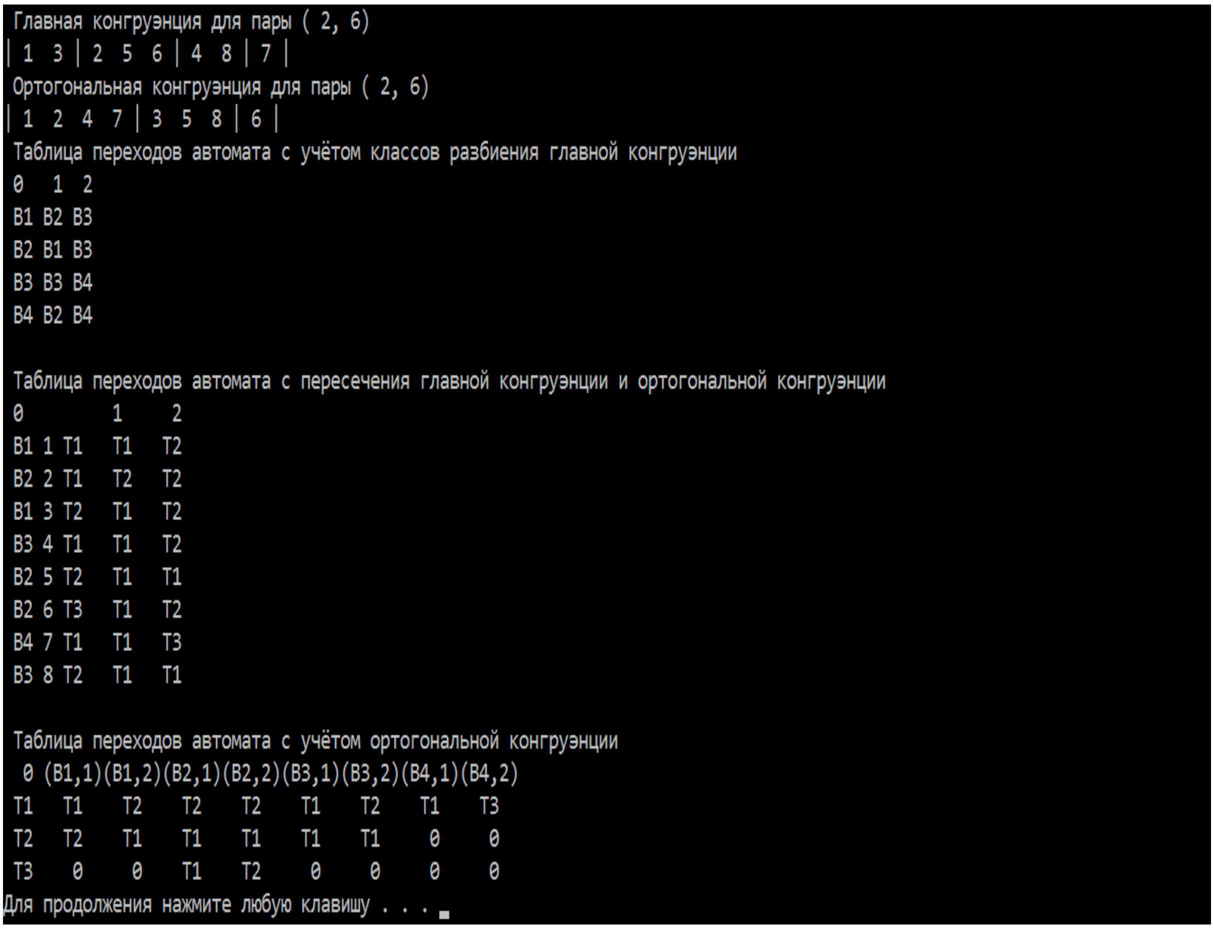
Затем перепишем таблицы автомата в соответствии с полученной образующей и ортогональной конгруэнцией

Процесс ввода данных для программы реализующей последовательную декомпозицию автомата отображён на рисунке 2.

```
 Количество элементов множества входных символов
2
 Количество элементов множества состояний
8
 Введите состояния в которые переходит автомат. Вводите построчно для каждого состояния все переходы по всем входным симво
лам.
2
8
3
8
5
4
7
8
1
4
1
8
7
6
7
4
 Таблица переходов заполнена
0   1   2
1   2   8
2   3   8
3   5   4
4   7   8
5   1   4
6   1   8
7   7   6
8   7   4
 Для какого количества состояний необходимо построить замыкание ?
2
 Введите состояния . Состояния должны быть различны.
2
6
```

Рисунок 2 – ввод данных для программы реализующей последовательную декомпозицию

Пример работы программы реализующей последовательную декомпозицию для автомата описанного в главе 2 данной работы отображён на рисунке 3.



```
Главная конгруэнция для пары ( 2, 6)
| 1  3 | 2  5  6 | 4  8 | 7 |
Ортогональная конгруэнция для пары ( 2, 6)
| 1  2  4  7 | 3  5  8 | 6 |
Таблица переходов автомата с учётом классов разбиения главной конгруэнции
0  1  2
B1 B2 B3
B2 B1 B3
B3 B3 B4
B4 B2 B4

Таблица переходов автомата с пересечения главной конгруэнции и ортогональной конгруэнции
0       1    2
B1 1 T1   T1   T2
B2 2 T1   T2   T2
B1 3 T2   T1   T2
B3 4 T1   T1   T2
B2 5 T2   T1   T1
B2 6 T3   T1   T2
B4 7 T1   T1   T3
B3 8 T2   T1   T1

Таблица переходов автомата с учётом ортогональной конгруэнции
 0 (B1,1)(B1,2)(B2,1)(B2,2)(B3,1)(B3,2)(B4,1)(B4,2)
T1   T1    T2    T2    T2    T1    T2    T1    T3
T2   T2    T1    T1    T1    T1    T1     0     0
T3    0     0    T1    T2     0     0     0     0
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 3 – пример работы программы реализующей последовательную декомпозицию

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проделанной работе были изучены литературные источники следующих авторов: Ю.Г. Карпов, А.М. Богомолов, В.Н. Салий, И.П. Мангушева, П.М. Хрусталёв. Hartmains J., Stearns R.

Были рассмотрены необходимые сведения из теории алгоритмов, изучены алгоритмы поиска конгруэнций конечного автомата и построения последовательной декомпозиции автомата. Найдены конгруэнции автомата, а также построена его последовательная декомпозиция. Разработаны и реализованы алгоритмы поиска образующей конгруэнции автомата и построения последовательной декомпозиции автомата.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Мангушева И.П., Хрусталёв П.М. Лекции по дискретной математике. Часть II. Графы. Кодирование. Ограничено детерминированные функции и конечные автоматы. Элементы теории алгоритмов: Учеб. Пособие. -Саратов: Изд — во «Научная книга», 2007.-95с. С.54, 58

2 Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. - М.: изд. Наука. Физматлит, 1997.С. 96 и 315-319.

3 Карпов Ю.Б. Теория автоматов. СПб.:Питер, 2003. С. 136-145

Hartmains J., Stearns R. Algabraic Structure Theory of Seqeuential Machines. New York: Prentice – Hall Inc., 1966.