Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
механико-математического факультета
Овчаренко Виктории Ильиничны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ________________ В. А. Халова

подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ А. П. Хромов

подпись, дата

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Многие вопросы построения и исследования математических моделей физических явлений приводят к исследованию спектра и разложению заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям оператора. Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой интенсивно развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова, Е. Гобсона, А. Хаара. Большое внимание в спектральной теории уделяется вопросам равносходимости разложений по собственным и присоединенным функций операторов и по известным системам функций.

Цель работы. Установить равносходимость разложений произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям конечномерного возмущения интегрального оператора третьего порядка с инволюцией и по обычной тригонометрической системе.

Структура работы. Магистерская работа содержит 72 страницы машинописного текста и состоит из введения, шести глав:

1. Условия существования и явный вид обратного оператора;
2. Резольвента простейшего дифференциального оператора;
3. Оценки резольвенты $R_{0,\lambda}$;
4. Резольвента дифференциального оператора L_1;
5. Резольвента Фредгольма интегрального оператора A;
6. Основная теорема,

заключения и списка используемых источников (21 источник).

Научная новизна. В магистерской работе излагается доказательство теоремы равносходимости для нечетного случая конечномерного возмущения интегрального оператора с особенностями на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. При этом получены условия существания обратного оператора и выписаны условия регулярности по Биркофу. Эти условия являются необходимым при получении теоремы равносходимости, но в большинстве случаев трудно проверяемы. В работе приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

Положения, выносимые на защиту. Решена задача обращения рассматриваемого оператора. Иследованы асимптотические свойства резольвент двух дифференциальных операторов. Установлена равносходимость разложений по собственным и присединненым функциям рассматриваемого оператора и дифференциального оператора, представляющего сабой главную часть обратного оператора. Доказана теорема равносходимости.

Основное содержание работы

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотривается оператор вида

$$Af(x) = \alpha\int\limits_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \int\limits_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k) g_k(x), \quad (0.1)$$

$x \in [0,1], \alpha^2 \neq 1, (f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t) v_k(t)\,dt,\ v_k(t) \in C^3[0,1],\ g_k(x) \in C^3[0,1]$, $\{g_k^{(3)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k^{(3)}(t)\}_1^m$ — линейно независимые системы функций.

В первой главе решается задача обращения рассматриваемого оператора. Теорема 1 дает условия существования обратного оператора, теорема 2 — его явный вид.

Теорема 1. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} M = m, \quad (0.2)$$

где M — матрица размера $(3+m)\times m$ с элементами

$$\tau_{jk} = D^{j-1} T g_k(0), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\tau_{jk} = \delta_{j-3,k} + (Lg_k, v_{j-3}), \quad j = 4, \ldots, 3+m, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$D = \frac{d}{dx}$, $T = \alpha E - S$, E *— единичный оператор,* $Sf(x) = f(1-x)$, δ_{jk} *— символ Кронекера,* $L = \dfrac{1}{\beta} D^3 T$, $\beta = \alpha^2 - 1$.

Обозначим $\Delta = \det|\delta_{j,k} + (Lg_k, v_j)|_1^m \neq 0$.

Теорема 2. *Если $\Delta \neq 0$, то оператор A^{-1} имеет вид:*

$$A^{-1}y(x) = Ly(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^m Lg_k(x) \sum_{j=1}^m (Ly, v_j)\Delta_{jk}, \quad (0.3)$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элемента с номером (j,k) в матрице определителя Δ. Причем $y(x)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\sum_{k=0}^2 [\tilde{a}_{ik} y^{(k)}(0) + \tilde{b}_{ik} y^{(k)}(1)] = (y, \tilde{\varphi}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (0.4)$$

где $\tilde{a}_{ik}$, $\tilde{b}_{ik}$ *— некоторые константы,* $\tilde{\varphi}_i(t) = \dfrac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}Tv_j^{(3)}(t)$.

Во второй главе рассматривается простейший дифференциальный оператор L_0 :

$$Ly(x), \quad U_j(y) = \sum_{k=0}^{\sigma_j}[a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь Ly — главная часть оператора A^{-1}, $U_j(y)$ — главная часть краевых условий (0.4) после нормировки.

Обозначим через $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L_0.

Пусть $\Delta_0(\lambda)$ — матрица 3×3 из $U_{jk} = U_j(V_k)$, где V_k — фундаментальная система решений матричного уравннения $V - \lambda DV = 0$, $D = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 3 дает формулу резольвенты оператора L_0.

Теорема 3. *Если* λ *таково, что* $\Delta_0^{-1}(\lambda)$ *существует, то*

$$R_{0,\lambda}f(x) = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda),$$

где $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda))^T$*-решение краевой задачи*

$$v^{(3)}(x) - \lambda Dv(x) = BF(x), \tag{0.5}$$

$$U_j(v) = \sum_{\tau=0}^{\sigma_j}[P_{\tau j}v^{(\tau)}(0) + Q_{\tau j}v^{(\tau)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{0.6}$$

где $D = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, $P_{\tau j} = \begin{pmatrix} p_{\tau j}^1 & p_{\tau j}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_{\tau j} = = (-1)^{\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{\tau j}^1 & -p_{\tau j}^2 \end{pmatrix}$, $p_{\tau j}^1 = a_{\tau j} + (-1)^{\tau}b_{\tau j}$, $p_{\tau j}^2 = a_{\tau j} - (-1)^{\tau}b_{\tau j}$.

В третьей главе исследуются асимптотические свойства резольвенты $R_{0,\lambda}$.

Теорема 4. *В области S_{δ_0} при $|\rho| \to \infty$ имеют место оценки:*

$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_\infty,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} f\|_1 = O\Big(|\rho|^{-2+s}\psi(\rho)\Big)\|f\|_1,$$
$$\|D^s R_{0,\lambda} \chi\|_\infty = O\Big(|\rho|^{-3+s}\Big),$$

где $s = 0, 1, 2$, $\psi(\rho) = æ(\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_1) + æ(\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_2) + æ(\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_3)$, $æ = \frac{1-e^{-y}}{y}$, $y > 0$ и $\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0, \eta_1] \subset (0, 1)$.

Здесь $\lambda = \rho^3$, $\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_1 > 0$, $\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_2 \geq 0 \geq \operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_3$, S_{δ_0} — область с удаленными нулями некоторой характерестической функции вместе с одинаковыми кружками радиуса δ_0.

Далее, в главе 4 рассмотривается дифференциальный оператор L_1 :

$$Ly(x), \quad V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и изучаются асимптотические свойства его резольвенты $R_{1,\lambda} = (L_1 - \lambda E)^{-1}$.

Теорема 5 показывает формулу связывающую резольвенты операторов L_1 и L_0.

Теорема 5. *Резольвенты $R_{1,\lambda}$ и $R_{0,\lambda}$ связаны формулой*

$$R_{1,\lambda} f(x) = R_{0,\lambda} f(x) + Q_\lambda f(x) \quad (f \in L[0, 1]), \tag{0.7}$$

где

$$Q_\lambda f = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\big(\tilde{\eta}_{k,2j-1}(x,\lambda) + \tilde{\eta}_{k,2j}(x,\lambda)\big)\int\limits_0^1 \varphi_j(t) R_{0,\lambda} f(t)\,dt, \tag{0.8}$$

$\tilde{\eta}_{kj}(x,\lambda)$ $(k = 1, 2;\ j = 1, \ldots, 6)$ *— компоненты матрицы*

$$(V_1(x,\lambda), V_2(x,\lambda), V_3(x,\lambda))\Delta_1^{-1}(\lambda).$$

Теорема 6 дает равносходимость разложений произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ по собственным и присоединенным функциям операторов L_1 и L_0.

Теорема 6. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_{0,r} f\|_{[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где

$$\Omega_{0,r} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_{1,\lambda} - R_{0,\lambda}) f(x)\, d\lambda$$

и r таково, что $\{\rho : |\rho|^3 = r,\ 0 \le \arg\rho \le \frac{2\pi}{3}\} \subset S_{\delta_0}$, $0 < \delta \le 1/2$.

В главе 5 устанавливается равносходимость спектральных разложений оператора L_0 и оператора A.

Обозначим через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ резольвенту Фредкольма оператора A.

Теорема 7. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_r f\|_{[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где

$$\Omega_r f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda - R_{0,\lambda}) f(x)\, d\lambda$$

и r таково, что

$$\{\rho : |\rho|^3 = r, 0 \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{2\pi}{3}\} \subset S_{\delta_0}, 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

В главе 6 доказывается теорема равносходимости для оператора A.

Обозначим $\Delta = \det|\delta_{j,k} + (Lg_k, v_j)|_1^m \neq 0$,

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} q_{11}\tilde\omega_1^{\sigma_1} & q_{12}\tilde\omega_2^{\sigma_1} & q_{13}\tilde\omega_3^{\sigma_1} \\ q_{21}\tilde\omega_1^{\sigma_2} & q_{22}\tilde\omega_2^{\sigma_2} & q_{23}\tilde\omega_3^{\sigma_2} \\ q_{31}\tilde\omega_1^{\sigma_3} & q_{32}\tilde\omega_2^{\sigma_3} & q_{33}\tilde\omega_3^{\sigma_3} \end{vmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{vmatrix} p_{14}\tilde\omega_4^{\sigma_1} & p_{15}\tilde\omega_5^{\sigma_1} & p_{16}\tilde\omega_6^{\sigma_1} \\ p_{24}\tilde\omega_4^{\sigma_2} & p_{25}\tilde\omega_5^{\sigma_2} & p_{26}\tilde\omega_6^{\sigma_2} \\ p_{34}\tilde\omega_4^{\sigma_3} & p_{35}\tilde\omega_5^{\sigma_3} & p_{36}\tilde\omega_6^{\sigma_3} \end{vmatrix},$$

где q_{jk}, p_{jk} — коэффициенты при $\tilde{\omega}_k^{\sigma_j}$ в матрице $\Delta_0(\lambda)$.

Теорема 8 (основная). Пусть выполняются следующие условия: 1) $\Delta \neq 0$; 2) $\Theta_1\Theta_2 \neq 0$; 3) $g_k^{(3)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ — непрерывные функции ограниченной вариации. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место соотношение:

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_{r|\sqrt{\beta}|}(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ —- частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характерестических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k, для которых $(2k\pi)^3 < r$ и r таково, что $\{\rho : |\rho|^3 = r, 0 \leqslant \arg\rho \leqslant 2\pi/3\} \subset \tilde{S}_{\delta_0}$.

Основные источники, используемые в работе:

1. Халова, В. А. Конечномерные возмущения интегральных операторов с ядрами, имеющими скачки производных на диагоналях: дис. … канд. физ.-мат. наук / Виктория Анатольевна Халова; науч. рук. А. П. Хромов; Сарат. гос. ун-т. Саратов, 2006. 123 с.

2. Корнев, В. В. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 33–50

3. Хромов, А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов / А. П. Хромов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156). № 3. С. 378–404.

4. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. М. : Наука, 1969.

5. Белман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Белман, К. Л. Кук. М. : Мир, 1967. 548 с.

6. Халова, В. А. Задача обращения одного класса интегральных операторов / В. А. Халова // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125–127.

7. Халова, В. А. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях / В. А. Халова // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 127–130.

8. Халова, В. А. О резольвенте одного класса интегральных операторов / В. А. Халова // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 149–152.

9. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. Корн. М. : Наука, 1974. 720 с.

10. Хромов А. П. Вопросы сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов : уч. пособие. / А. П. Хромов, А. В. Голубь, В. В. Корнев, В. А. Халова. USA : Изд-во LULU Publ. Inc., 2014. 60 с.

11. Гуревич А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. СПб. : Лань, 2012. 192 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен интегральный оператор

$$Af(x) = \alpha \int\limits_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \int\limits_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^2}{2} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(x), \quad (1)$$

Получены условия существования обратного оператора A^{-1} и выписан его явный вид. Рассмотрены резольвенты дифференциальных операторов L_0 и L_1. Получены ассимптотические оценки для них. Установлена равносходимость спектральных разложений операторов L_0 и L_1, а так жеA и L_0. Установлена равносходимость разложений произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединеным функциям оператора A и по обычной тригонометрической системе.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях и при решении ряда задач математической физики.