Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

Анализ замкнутых сетей массового обслуживания методом свертки

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Солдаткиной Инги Михайловны

Научный руководитель
доцент, к.ф.- м.н. Н.П. Фокина

Заведующий кафедрой
д. т. н., профессор Ю.И. Митрофанов

Саратов 2016

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория массового обслуживания − область прикладной математики, связанная с построением и исследованием математических моделей определенного класса дискретных систем со стохастическим характером функционирования. Системы данного класса предназначены для обслуживания запросов, которые поступают в системы. Эти запросы называются требованиями. В общем случае процессы поступления требований в системы и процессы их обслуживания являются случайными.

Математические модели систем и сетей обслуживания называются системами массового обслуживания (СМО) и сетями массового обслуживания (СеМО) соответственно [1].

Методы теории массового обслуживания ориентированы на анализ систем и сетей массового обслуживания. Главными задачами, решаемыми методами этой теории, являются математическая формализация процессов функционирования систем и сетей массового обслуживания, получение математических выражений для характеристик их математических моделей, изучение причин специфических явлений при функционировании исследуемых систем и сетей. Сети обслуживания, как модели дискретных систем, используются для вычисления временных характеристик, коэффициентов использования обслуживающих приборов, надежности, производительности и прочих функциональных параметров дискретных систем при довольно общих предположениях об их процессах функционирования и структуры.

Примерами дискретных стохастических систем, математическими моделями которых являются системы и сети массового обслуживания, могут служить производственные системы, информационно-вычислительные сети, сети передачи данных, транспортные и логистические сети.

Широкому практическому использованию СеМО способствуют естественность и простота, с которыми они отражают структуры моделируемых систем и процессы обработки в системах объектов разных типов, наличие фундаментальных теоретических результатов и достаточно эффективных вычислительных алгоритмов, а также огромный опыт использования моделей СеМО при решении практических задач исследования дискретных систем [2].

Цель бакалаврской работы. Целью работы является:

1. Изучение однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания и метода свертки для анализа данных сетей.
2. Разработка алгоритма анализа замкнутых сетей массового обслуживания методом свертки.
3. Разработка программы, реализующей данный алгоритм.
4. Проведение экспериментов с программой и анализ результатов.

Методы исследования. Использовались методы и результаты теории вероятностей, теории марковских процессов, теории массового обслуживания.

Основные результаты.

1. Изучены однородные замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания.

2. Изучен метод свертки для анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания.

3. Разработан алгоритм метода свертки и составлена блок-схема данного алгоритма.

4. Разработана программа, реализующая данный алгоритм.

5. При помощи программы решены задачи подбора параметров модельной сети для достижения требуемых значений некоторых стационарных характеристик.

Данная бакалаврская работа состоит из введения, 5 разделов, списка литературы и заключения. Общий объем работы без приложений - 60 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит общую характеристику работы.

В **первом разделе** описываются системы и сети массового обслуживания. Рассматривается состав и структура систем массового обслуживания, их основные характеристики и типы. Так же описываются сети массового облуживания и их типы.

Во **втором разделе** рассматриваются замкнутые сети массового обслуживания и приводятся их характеристики. Более подробно рассматриваются однородные замкнутые сети массового обслуживания и описывается анализ сетей массового обслуживания методом свертки.

Рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания, которая состоит из L систем массового обслуживания C_i, $i = 1, \dots, L$, типа $M/M/k_i$ с интенсивностью обслуживания требований одним прибором μ_i. В сети находится N требований одного класса. Переходы требований между системами обслуживания в процессе функционирования сети определяется неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$.

Время обслуживания требований системой C_i, когда в C_i находится n_i требований, является экспоненциально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $1/[\alpha_i(n_i)\,\mu_i]$., где $\alpha_i(n_i) = \min\{n_i, k_i\}$

Определим набор вспомогательных функций. Пусть

$$A_i(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ \prod_{l=1}^{m} \alpha_i(l), & \text{если } m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, L, \end{cases} \tag{1}$$

Состояние сети определяется вектором $n = (n_i)$, где n_i − число требований, находящихся в системе C_i.

Эволюция сети описывается марковской цепью с непрерывным временем и конечным множеством состояний.

$$S(N, L) = \{n = (n_1, \dots, n_L) | n_i \geq 0, i = 0, \dots, L, \textstyle\sum_{i=1}^{L} n_i = N\}, \tag{2}$$

где n_i − число требований, пребывающих в системе C_i. Мощность $S(N, L)$ равна $\binom{N+L-1}{L-1}$.

Стационарные вероятности состояний сети, в которой интенсивности обслуживания требований зависят от загрузки систем C_i, $i = 1, 2, \dots, L$, будут иметь вид [1]:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_L) = \frac{1}{G(N,L)} \prod_{j=1}^{L} \frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}, \tag{3}$$

где

$$x_i = \frac{\omega_i}{\mu_i},$$

ω_i − относительная интенсивность входящего потока требований в C_i,

$G(N, L)$ - нормализующая константа, определяемая выражением

$$G(N, L) = \sum_{n \in S(Y,Z)} \prod_{j=1}^{L} \frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}.$$

Вектор $\omega = (\omega_i)$, $i = 1, \dots, L$, является решением уравнения

$$\omega = \Theta\omega,$$

с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{L} \omega_i = 1.$$

Вычисление $G(N, L)$ для сетей массового обслуживания с многоприборными системами обслуживания более сложно, чем для сетей с одноприборными системами.

Определим вспомогательную функции $g(Y, Z)$**.** Пусть

$$g(Y, Z) = \sum_{n \in S(Y,Z)} \prod_{j=1}^{Z} \frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)}. \tag{4}$$

$$g(Y, L) = G(Y, L) \text{ для } Y = 0, 1, \dots, N.$$

Необходимо отметить, что для $Z > 1$

$$g(Y, Z) = \sum_{m=0}^{Y} \left[\sum_{n \in S(Y,Z) \& n_z = m} \prod_{j=1}^{Z} \frac{x_j^{n_j}}{A_j(n_j)} \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{Y} \frac{x_Z^m}{A_Z(m)} g(Y - m, Z - 1). \tag{5}$$

Выражение (5) представляет собой основное рекуррентное соотношение для вычисления функции $g(Y, Z)$.

Из выражения (4) следует, что

$$g(Y,1)=\frac{x_1^Y}{A_1(Y)}, \text{ для } Y=0,1,\ldots,N,$$
$$g(0,Z)=1\,, \text{ для } Z=1,2,\ldots,L. \quad (6)$$

Выражения (6) определяют начальные значения функций $g(Y,Z)$, а выражение (5) определяют основной шаг вычислений. В таблице 1 приведено схематическое представление алгоритма для вычисления $G(N,L)$.

Таблица 1 – Выполнение алгоритма

	x_1	…	x_{Z-1}	x_Z	…	x_L
0	1	…	$1\times\frac{x_Z^Y}{A_Z(Y)}+ \rightarrow$	1	…	1
1			$g(1,Z-1)\times\frac{x_Z^{Y-1}}{A_Z(Y-1)}+ \rightarrow$			
2			$g(2,Z-1)\times\frac{x_Z^{Y-2}}{A_Z(Y-2)}+ \rightarrow$			
…			…			
$Y-2$			$g(Y-2,Z-1)\times\frac{x_Z^{2}}{A_Z(2)}+ \rightarrow$			
$Y-1$			$g(Y-1,Z-1)\times\frac{x_Z^{1}}{A_Z(1)}+ \rightarrow$			
Y			$g(Y,Z-1)\times\frac{x_Z^{0}}{A_Z(0)}+ \rightarrow$	$\rightarrow g(Y,Z)$		
…			…			
N						$g(N,L)$

Конечной целью алгоритма является определение величины в нижнем правом углу таблицы, так как $g(N,L)=G(N,L)$. Весь правый столбец таблицы представляет интерес, так как содержит $g(Y,L)=G(Y,L)$ для $Y=0,1,\ldots,N$. При организации вычислительной схемы нет необходимости хранить в оперативной памяти ЭВМ всю $N\times L$ — матрицу величин $g(Y,Z)$. В действительности достаточно хранить лишь один столбец таблицы (N величин).

Стационарные вероятности пребывания в системе не менее m требований и ровно m требований определяются через нормализующие константы следующим образом:

$$P\{n_i \geq m|N\} = x_i^m \frac{G(N-m,L)}{G(N,L)}, \tag{7}$$

$$P\{n_i = m|N\} = \frac{x_i^m}{G(N,L)}[G(N-m,L) - x_i G(N-m-1,L)], \tag{8}$$

Стационарные характеристики системы C_i сети, такие как математическое ожидание (м.о.) числа требований в системе, м.о. числа требований, находящихся на обслуживании, интенсивность входящего потока требований и м.о. длительности пребывания требований в системе определяются соответственно через стационарные вероятности состояний и, в конечном счете, через нормализующие константы выражениями [14]:

$$\bar{n}_i = \sum_{m=1}^{N} x_i^m \frac{G(N-m,L)}{G(N,L)}, \tag{9}$$

$$\bar{h}_i = x_i \frac{G(N-1,L)}{G(N,L)}, \tag{10}$$

$$\lambda_i = \bar{h}_i \mu_i, \tag{11}$$

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{n}_i}{\lambda_i}. \tag{12}$$

В **третьем разделе** приводится подробное описание разработанного алгоритма и его структурная схема. Отдельно описан каждый блок структурной схемы.

Алгоритм анализа однородных замкнутых сетей массового обслуживания с многоприборными системами массового обслуживания методом свертки состоит из нескольких блоков, которые выполняются последовательно:

1. Ввод исходных данных.

Пользователем задаются следующие параметры исследуемой сети:

L – число систем обслуживания сети;

N – число требований в сети;

$\Theta = (\theta_{ij})$, $i,j = 1,\dots,L$ – маршрутная матрица, представленная в упакованном виде;

$\mu = (\mu_i)$, $i = 1,\dots,L$ – вектор интенсивностей обслуживания требований системами сети;

$k = (k_i)$, $i = 1,\dots,L$ – вектор числа приборов в системах сети.

2. Решение системы линейных уравнений $\omega = \omega\Theta$ методом Гаусса-Зейделя с условием нормировки $\sum_{i=1}^{L} \omega_i = 1$.

3. Выбор масштабного коэффициента для ω_i, ограничивающего значения $G(N,L)$.

Использование этого коэффициента позволяет уменьшить скорость возрастания или убывания величин $g(Y,Z)$ при вычислении нормализующей константы. Масштабный коэффициент C вычисляется по формуле:

$$C = \sum_{i=1}^{L} x_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{L} x_i^2. \qquad (13)$$

4. Вычисление нормализующей константы $G(N,L)$ и значения величин $g(Y,L)$, осуществляется по формуле (5) с использованием формул (6) и (13).

5. Вычисление стационарных характеристик сети массового обслуживания по формулам (7) – (12).

6. Вывод результатов:
   - распределение вероятностей состояний систем сети;
   - м.о. числа требований в системе $С_i$, $i = 1,2,\dots,L$;
   - м.о. длительности пребывания требований в системе $С_i$, $i = 1,2,\dots,L$;
   - интенсивность потока требований в систему $С_i$, $i = 1,2,\dots,L$;
   - коэффициент использования приборов в системе $С_i$, $i = 1,2,\dots,L$.

В **четвертом разделе** описывается программа, разработанная для анализа сетей массового обслуживания методом свертки. Приводится описание функциональных блоков программы и демонстрируется ее интерфейс. Также описываются аспекты практического использования программы.

Программа реализована на языке Delphi. Программа работает в соответствии с разработанным алгоритмом функционирования, имеет удобный графический интерфейс, выдает уведомления об ошибках при некорректно заданных входных данных, поддерживает диалоговый режим в рамках предоставляемых пользователю возможностей.

При запуске программы появляется окно, в котором осуществляется ввод входных данных. Пользователь заносит входные данные в соответствующие поля. Основное окно программы изображено на рисунке 1.

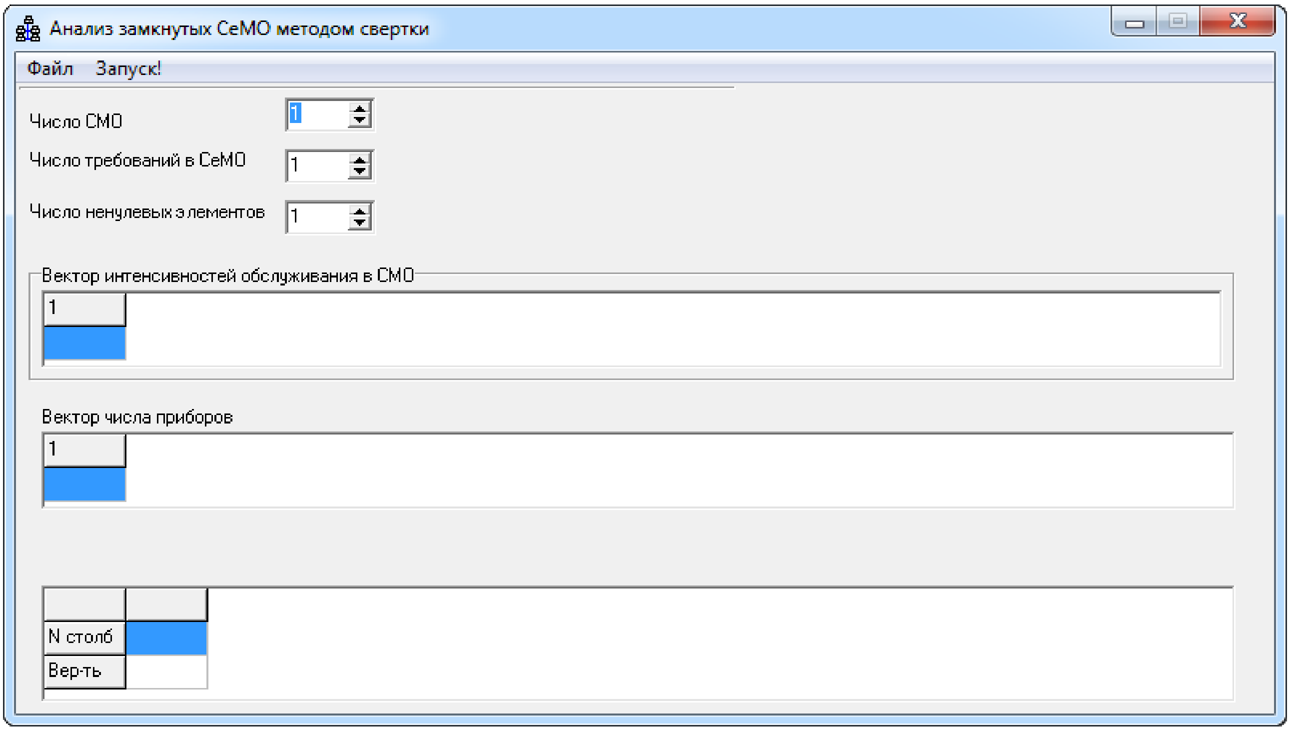

Рисунок 1 – Окно программы.

В поле «Число СМО» указывается число систем в сети. В поле «Число требований» указывается число требований, циркулирующих в сети. В поле «Число ненулевых элементов» указывается количество ненулевых элементов маршрутной матрицы Θ. В поле «Вектор интенсивностей обслуживания в СМО» указываются значения интенсивностей обслуживания в соответствующих СМО. В поле «Вектор числа приборов» указывается число приборов в соответствующих системах обслуживания.

В нижнем поле формы указывается маршрутная матрица в упакованном виде. В упакованном виде маршрутная матрица характеризуется двумя векторами значений $t1,\ t2$. Вектор $t1$ содержит номера столбцов ненулевых элементов матрицы Θ, причем последний ненулевой столбец каждой строки должен указываться со знаком минус. В $t2$ записываются ненулевые значения матрицы θ_{ij}.

Пусть сеть характеризуется следующей маршрутной матрицей

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

В упакованном виде эту маршрутную матрицу можно представить в виде двух векторов $t1 = (2, -3, -1, 2, -3)$, $t2 = (0.5\ \ 0.5\ \ 1\ \ 0.3\ \ 0.7)$.

Вывод полученных результатов осуществляется в создаваемый текстовый файл, имя и расположение которого определяется пользователем. Выходные данные содержат следующие характеристики:

$$L,\ N,\ \mu_i,\ k_i,\ P\{n_i = m|N\},\ \bar{u}_i,\ \bar{n}_i,\ \bar{w}_i,\ \bar{b}_i,\ \bar{h}_i, \lambda_i,\ \psi_i, \bar{\tau}_i, \omega_i,$$

$$\text{где } i = 1, \dots, L$$

Вероятности $P\{n_i = m|N\}$ выводятся в таблицу отдельно для каждой системы сети. Первый столбец результирующей таблицы содержит значение $m = 0, \dots, N$. Второй столбец - значение $P\{n_i = m|N\}$ для -той СМО сети.

В **пятом разделе** приводятся результаты исследования модельной замкнутой сети массового обслуживания, которые были проведены при помощи разработанной программы. Данные исследования демонстрируют зависимость математического ожидания числа требований в системах сети от интенсивностей обслуживания, зависимость загрузки системы от интенсивностей обслуживания, зависимость математического ожидания числа требований в системах сети от маршрутной матрицы. При помощи программы решены несколько задач подбора параметров сетей, обеспечивающих требуемые значения выбранной стационарной характеристики сети.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены однородные замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания. Изучены методы анализа однородных замкнутых сетей массового обслуживания: рекурсивный метод и метод свертки.

Разработан алгоритм анализа замкнутых сетей массового обслуживания методом свертки. Составлена и описана блок-схема данного алгоритма. Разработана программа, вычисляющая стационарные характеристики сети согласно разработанному алгоритму.

Исследованы зависимости математического ожидания числа требований в системах сети от различных параметров: интенсивностей обслуживания систем и маршрутной матрицы сети. С использованием разработанной программы подобраны такие значения изменяемых параметров сети, чтобы выбранная характеристика имела требуемые значения. Проведен анализ полученных результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учебное пособие/Ю. И. Митрофанов. Саратов: Научная книга,2005. 175 с.

2 Тихоненко, О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекции/ О. М.Тихоненко. Мн.: БГУ, 2007. 147 с.

3 Саати, Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения/ Т.Л. Саати; пер. Е.Г. Коваленка; под. общ. ред. И.Н. Коваленко, Р.Д. Когана. М: Советское радио, 1965. 512 с.

4 Гнеденко, Б.В. Беседы о теории массового обслуживания/ Б.В. Гнеденко. М: Либроком, 2010. 72 с.

5 Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания/ П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. М.: РУДН, 1995. 529 с.

6 Лабскер, Л. Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учебное пособие/Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. М.: ЮНИТИ,1998. 319 с.

7 Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология/ Е. С. Вентцель. 2-е изд., М.: Наука, 1998. 208 с.

8 Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания: Учебное пособие для вузов/ Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.

9 Матвеев, В.Ф. Системы массового обслуживания: Учебное пособие для вузов / В.Ф. Матвеев, В.Г. Ушаков. М: МГУ, 1984. 242 с.

10 Лифшиц, А.Л. Статистическое моделирование систем массового обслуживания /А.Л.Лифшиц, Э.А. Мальц. М.: Советское радио, 1978. 249 с.

11 Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: Учебное пособие для вузов/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. Томск : НТЛ, 2004. 228 с.

12 Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и способы расчета/ Г.П. Башарин, П. П. Бочаров, Я.А. Коган. М.: Наука, 1989. 336 с.

13 Вишневский, В.М. Теоретические основы построения компьютерных сетей/ В.М. Вишневский. М.: Техносфера, 2003. 512 с.

14 Долгов, В.И. Методы анализа сетей массового обслуживания/ В.И. Долгов. Саратов: Научная книга, 2009. 32с.