МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Раскраски графов

АФТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Кочеткова Алексея Георгиевича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2020 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2020 г.

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время с помощью графов решается множество проблем в повседневной жизни. Различные алгоритмы, основанные на графах, помогают нам найти кратчайший объездной путь, ближайший магазин, спланировать оптимальный маршрут или составить расписание занятий.

Одной из задач в теории графов является задача раскраски графа. Раскраски графа находят применение в таких сферах, как планирование, распределение регистров процессора, распределение частот, распараллеливание численных методов, цифровые водяные знаки и многие другие. Данная задача является вычислительно сложной, в частности, задача поиска хроматического числа графа также сложна.

В данной работе рассматривается алгоритм поиска хроматического числа для заданного графа, а также гипотеза Хедетниеми, включая известные случаи, подтверждающие и опровергающие эту гипотезу.

В первой части работы приводятся определения, связанные с раскраской и хроматическим числом графа. Во второй – описывается алгоритм поиска хроматического числа, включающий в себя метод Брона-Кербоша по поиску клик. В третьей – рассказывается о гипотезе Хедетниеми, представлены случаи, которые подтверждают гипотезу, а также контрпример к гипотезе.

В практической части описывается интерфейс программы и приводятся результаты её работы для различных входных графов.

Целью работы является написать программный продукт для исследования гипотезы Хедетниеми.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объём работы – 41 страница, из них 30 страниц – основное содержание, включая 14 рисунков и 2 таблицы, список использованных источников из 11 наименований.

1 Раскраска графов и хроматическое число

1.1 Раскраски графов

Раскраской графа называется расстановка меток на графе с некоторыми заданными ограничениями. Метки называются «цветами». Очевидно, что раскраска графа является частным случаем разметки графов. В данной работе исследуется раскраска вершин графа, поэтому под раскраской будет подразумеваться вершинная раскраска. Правильной раскраской является такая раскраска, в которой любые две смежные вершины имеют разные цвета [4].

1.2 Хроматическое число графа

Раскраска с использованием в точности k цветов называется k-раскраской. Хроматическим числом графа называется минимальное число k такое, что раскраска будет являться правильной. Хроматическое число графа G будет обозначаться как $\chi(G)$, а граф будет называться k-хроматическим [1].

1.3 Применение раскрасок графа

Раскраски графа находят применение в различных сферах, например, задача распараллеливания численных методов может быть решена при помощи нахождения минимальной правильной вершинной раскраски. Обобщенно задача выглядит так: объекты – некие вычисления, между которыми надо разделить вычислительные ресурсы (процессоры, компьютеры), работающие параллельно друг другу. Какие-то вычисления могут выполняться параллельно друг другу, какие-то – нет. Соответственно, вершинная раскраска графа несовместимости вычислений и представляет собой искомое распределение [3].

2 Алгоритм поиска хроматического числа для заданного графа

2.1 Метод рекурсивного поиска с возвратом

Метод рекурсивного поиска с возвратом (англ. backtracking) – метод, для нахождения решений задачи, в которой требуется полный перебор всех возможных вариантов в некотором множестве. Решение задачи методом поиска с возвратом сводится к последовательному расширению частичного решения.

Если на очередном шаге такое расширение провести не удаётся, то возвращаются к более короткому частичному решению и продолжают поиск дальше. Данный алгоритм позволяет найти все решения поставленной задачи, если они существуют [3].

2.2 Метод ветвей и границ

В основе метода ветвей и границ лежит следующая идея: если нижняя граница значений функции на подобласти A дерева поиска больше, чем верхняя граница на какой-либо ранее просмотренной подобласти B, то A может быть исключена из дальнейшего рассмотрения. Обычно минимальную из полученных верхних оценок записывают в глобальную переменную m; любой узел дерева поиска, нижняя граница которого больше значения m, может быть исключён из дальнейшего рассмотрения. Если нижняя граница для узла дерева совпадает с верхней границей, то это значение является минимумом функции и достигается на соответствующей подобласти [6].

2.3 Алгоритм Брона-Кербоша

Алгоритм использует тот факт, что любая клика в графе является его максимальным по включения полным подграфом. Начиная с одиночной вершины, которая уже образует полный подграф, данный алгоритм пытается увеличить уже построенный полный подграф, добавляя в него новые вершины. Быстродействие обеспечивается путем отсечения вершин, которые не приведут к построению клики.

В алгоритме имеются три важных множества:

1. множество подграфа – множество, содержащее на каждом шаге рекурсии полный подграф для данного шага;
2. множество $candidates$ (вершин кандидатов) – вершины, которые могут увеличить первое множество;
3. множество $used$ (использованных вершин) – вершины, которые уже были задействованы для расширения первого множества.

Сам алгоритм формулируется следующим образом:

1. на вход подаётся граф и список вершин;
2. пока список вершин $candidates$ не пустой и множество $used$ не содержит вершины, соединённой со всеми вершинами из $candidates$:
    a. Выбираем вершину v из $candidates$ и добавляем её в подграф $compsub$;
    b. Удаляем из $candidates$ и $used$ вершины не соединённые с вершиной v;
    c. Если $candidates$ и $used$ пусты, то подграф $compsub$ – клика, иначе возвращаемся к шагу 1.
    d. Удаляем вершину v из $compsub$ и $candidates$ и помещаем в $used$ [7].

2.4 Алгоритм поиска хроматического числа

Алгоритм поиска хроматического числа с помощью алгоритма Брона-Кербоша:

1. на вход подаётся граф;
2. находятся все клики у заданного графа;
3. находится максимальная клика;
4. максимальная клика раскрашивается в количество цветов, равным длине этой клики;
5. раскрашивается весь оставшийся граф:
    a. берётся смежная клика с найденной максимальной;
    b. поскольку смежные вершины уже раскрашены, то раскрашиваем оставшиеся вершины в новой клике. Цвета берутся из списка цветов, использованных для раскраски

максимальной клики минус использованные цвета в новой клике;

c. далее берётся клика смежная с новой раскрашенной кликой и повторяется предыдущий шаг;

d. Шаги b и c повторяются пока найденные в графе клики не закончатся.

Данный алгоритм возвращает раскраску заданного графа и его хроматическое число.

3 Гипотеза Хедетниеми

Стефен Хедетниеми (Stephen T. Hedetniemi) в 1966 году в своей докторской диссертации выдвинул гипотезу о минимальном количестве цветов для раскраски тензорного произведения двух графов:

Для любых графов G и H, $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$, где $\chi(G \times H)$ – хроматическое число тензорного произведения двух графов, а $\min\{\chi(G), \chi(H)\}$ – минимум из хроматических чисел графа G и графа H соответственно [2, 8].

3.1 Подтверждение гипотезы

Известные случаи, подтверждающие данную гипотезу:

1. если граф G или граф H 1-раскрашиваем, то очевидно, что их тензорное произведение так же 1-раскрашиваемо.
2. если либо граф G, либо граф H является двудольным, то двудольным является и их тензорное произведение;
3. граф $G \times H$ связен тогда и только тогда, когда оба множителя связаны и хотя бы один из них не является двудольным;
4. хроматическое число тензорного произведения двух графов с хроматическим число равным трём, так же будет равняться трём [9];

5. хроматическое число тензорного произведения двух графов с хроматическим число равным четырём, так же будет равняться четырём [10].

Таким образом, данная гипотеза доказана для графов с хроматическим числом меньше пяти, но это не означает, что хроматическое число тензорного произведения двух n-хроматических графов всегда будет равно n [5].

3.2 Опровержение гипотезы

Российский математик Ярослав Шитов в 2019 году нашёл контрпример для данной гипотезы.

Для произвольного графа H определяем экспоненциальный граф $E_s(H)$. Вершинами графа $E_s(H)$ будут функции, действующие из множества вершин графа H в множество чисел $\{1, 2, \ldots, s\}$. Две функции f и g считаем смежными, если они принимают различные значения на любых вершинах, смежных в графе H.

Тензорное произведение графов H и $E_s(H)$ можно правильно раскрасить в s цветов, независимо от хроматического числа графа H. Определим раскраску вершины (u, f) тензорного произведения равной $f(u)$. Рассмотрим пару вершин (u, f) и (v, g) смежных в тензорном произведении графов. Тогда, вершины u и v смежны в H, а вершины f и g смежны в $E_s(H)$. Значит, по определению экспоненциального графа числа $f(u)$ и $g(v)$ не совпадают, то есть так определённая раскраска тензорного произведения в s цветов является правильной.

Теперь найдём подходящий граф H, чтобы хроматические числа графов H и $E_s(H)$ были строго больше s. Классическая теорема Пала Эрдеша (Paul Erdos) утверждает, что найдутся графы со сколь угодно большим хроматическим числом и сколь угодно большим обхватом (минимальным циклом).

Рассмотрим граф G с обхватом 10 и хроматическим числом 5.

Определим граф H как сильное произведение графов G и K_q. K_q – полный граф. Граф H получается подстановкой q-клик во все вершины графа G, причём все вершины смежных q-клик попарно соединены рёбрами. Хроматическое число сильного произведения графа G на q-клику будет иметь хроматическое число не меньше, чем $5q$.

Ярослав Шитов доказал, что для достаточно больших q и $s > 4{,}1q$ экспоненциальный граф $E_s(H)$ имеет хроматическое число строго больше, чем s. Теперь достаточно выбрать такое s, что $5q > s > 4{,}1q$ и мы получаем, что оба сомножителя H и $E_s(H)$ в тензорном произведении имеют хроматические числа больше, чем s, а их тензорное произведение имеет хроматическое число равное s, как было доказано выше. Таким образом, гипотеза Хедетниеми опровергнута.

Ярослав Шитов не подсчитывал точный размер получающихся графов, но предполагает, что у графа H будет около 4^{100} вершин, а у экспоненциального графа не менее 4^{10000} вершин.

Полное описание данного контрпримера даётся в работе [11].

4 Практическая часть

В практической части была реализована программа, которая ищет хроматические числа введённых графов, строит их тензорное произведение, ищет хроматическое число тензорного произведения и проверяет выполняется ли утверждение гипотезы Хедетниеми.

4.1 Описание работы программы

В данном пункте была описана структура программы, приведены её скриншоты и показаны форматы входных и выходных данных.

4.2 Примеры выполнения программы

В данном пункте представлено две таблицы с результатами работы программы и описаны какие именно случаи проверялись в ходе работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были описаны: алгоритм Брона-Кербоша для поиска клик в графе и алгоритм поиска хроматического числа заданного графа с помощью алгоритма Брона-Кербоша. Также была описана гипотеза Хедетниеми, включая известные случаи, подтверждающие ее, и контрпример.

Был представлен программный продукт для исследования гипотезы Хедетниеми, разработанный на языке Python 3.7. Данная программа строит тензорное произведение двух заданных графов, у всех трех графов считает хроматические числа, правильно раскрашивает эти графы и проверяет выполняется ли утверждение гипотезы.

Программный продукт проверил гипотезу Хедетниеми на различных графах, обработав 12293427 графов, построив 15669905921760 тензорных графов, имеющих до 100 вершин включительно.

Таким образом, в ходе данной работы гипотеза Хедетниеми о минимальном количестве цветов для раскраски тензорного произведения двух графов была подтверждена практическим способом на графах с числом вершин до 100.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Абросимов, М.Б. Практические задания по графам: учебное пособие / М.Б. Абросимов, А.А. Долгов. Сар.: Научная книга. – 2009. – С. 76.

2 Sauer, N. Hedetniemi's conjecture / N. Sauer // Discrete Mathematics 229. – 2001. – p. 261-292.

3 Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. – Электрон. дан. (1584104 статей, 6 053 649 страниц, 221 877 загруженных файлов). – Wikipedia®, 2001- . – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 18.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

4 Klavzar, S. Coloring graph products / S. Klavzar // Discrete Mathematics 155. – 1996. – p. 135-145.

5 В поисках хроматического числа [Электронный ресурс] / N+1 [Электронный ресурс] : интернет -издание / свидетельство о регистрации СМИ Эл №ФС77-67614. – URL: https://nplus1.ru/material/2019/05/30/stephen-hedetniemi-refutation (дата обращения 13.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

6 Land, A. H. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems / A. H. Land, A. G. Doig // Econometrica. – 1960. – V. 28, №3. – p. 497-520.

7 Bron, C. Algorithm 457 Finding all cliques of an undirected graph [H] [Электронный ресурс] / C. Bron, J. Kerbosch // Technological Univ. Eindhoven. – URL: http://www.dcs.gla.ac.uk/~pat/jchoco/clique/enumeration/papers/bronKerboschACM.pdf (дата обращения: 07.10.2019) – Загл. с экрана. – Яз. англ.

8 Hedetniemi, S. My top 10 graph theory conjectures and open problems / Stephen T. Hedetniemi // Graph Theory: Favorite Conjectures and Open Problems – 1. – 2016. – p. 109-134.

9 Lovasz, L. Operations with structures / L. Lavasz // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1967. – T. 18, №3. – p. 321-328.

10 El-Zahar, M. The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4 / M. El-Zahar, N. W. Sauer // Combinatorica. – 1984. – T. 5, №2. – p. 121-126.

11 Shitov, Y. Counterexamples to Hedetniemi's conjecture [Электронный ресурс] / Y. Shitov // Cornel University, 2019. – URL: https://arxiv.org/pdf/1905.02167.pdf (дата обращения: 15.10.2019) – Загл. с экрана. – Яз. англ.