Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Неголономные координаты на многообразиях с контактной структурой

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки
код и наименование направления (специальности)
Механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Мартынова Антона Жановича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Доцент, канд. физ-мат наук		Галаев С.В.
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

Доктор физ-мат наук, профессор		Розен В.В.
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

Введение

Цель выпускной работы заключается в обобщении понятия голономных координат, определяемых картами дифференцируемых многообразий. Введённое Декартом понятие координат играет большую роль как в математики, так и в ее приложениях к механике, физике, геодезии и т.п. Вместе с тем, с развитием этих дисциплин идея координат, как характеристик точек множества, стала распространяться на более сложные объекты, такие как векторы, скорости и тензоры. В этих случаях сначала координаты новых объектов инициировались обычными системами координат на подходящих множествах. Однако, затем координаты, определяющие объекты, имеющие физическую природу, приобрели самостоятельное значение и никак не были связаны с обычными координатами. В механике А. Пуанкаре называл их квази-координатами, другие авторы – неголономными координатами. Актуальность работы подтверждается важным прикладным значением неголономных координат.

Выпускная работа содержит подробное и замкнутое в себе изложение основных положений, связанных с понятием неголономных координат. В работе приводятся два основных примера естественного возникновения неголономных координат на дифференцируемых многообразиях. В первом примере неголономные координаты определяются заданием полем левоинвариантных векторных полей. Во втором примере неголономными координатами являются адаптированные координаты, естественным образом определяемые на многообразии с контактной структурой.

В процессе выполнения выпускной работы были решены следующие задачи:

1. Изучены основные понятия, связанные с теорией дифференцируемых многообразий: карты, касательные векторы, касательные отображения, скобки Ли и т.д.;

2. Подробно рассмотрен критерий голономности заданной системы координат;

3. Рассмотрены неголономные координаты, естественным образом возникающие на группах Ли,

4. Исследованы неголономные координаты на многообразиях с контактной структурой.

Выпускная работа содержит решения задач, не включенных в известные учебники и учебные пособия, что делает работу полезной для студентов-математиков.

Основное содержание работы

Выпускная работа содержит подробное и замкнутое в себе изложение основных положений, связанных с понятием неголономных координат. В работе приводятся два основных примера естественного возникновения неголономных координат на дифференцируемых многообразиях. В первом примере неголономные координаты определяются заданием полем левоинвариантных векторных полей. Во втором примере неголономными координатами являются адаптированные координаты, естественным образом определяемые на многообразии с контактной структурой.

Работа состоит из двух разделов. В первом разделе **«Векторные поля на дифференцируемом многообразии»** вводятся такие понятия, как касательные векторы к дифференцируемому многообразию, касательное пространство в точке, касательное отображение. векторное поле на дифференцируемом многообразии, скобка Ли векторных полей. Материал первого раздела известен из специальных дисциплин, читаемых на третьем и четвертом курсах.

В подразделе 1.1. **«Понятие дифференцируемого многообразия»** доказывается, что на множестве M в случае задания на нем структуры дифференцируемого многообразия определяется наименьшая топология, в которой все первые проекции карт являются открытыми, а сами локальные карты являются частичными гомеоморфизмами. Обычно требуют, чтобы эта топология была хаусдорфовой.

В подразделе 1.2. **«Некоторые примеры дифференцируемых многообразий»** показывается, что если M - n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^r и U - его открытое подмножество, то это подмножество с атласом, состоящим из ограничений локальных карт многообразия M на множество U, снова яляется дифференцируемым многообразием того же класса. Координатное пространство R^n является дифференцируемым многообразием класса C^∞, структура которого определяется атласом, состоящим из единственной канонической карты. Доказывается, также, что двумерная сфера является дифференцируемым многообразием размерности 2.

Второй раздел **«Неголономные координаты на дифференцируемом многообразии»** содержит понятия, непосредственно связанные с темой выпускной работы. В подразделе 2.1. **«Понятие неголономных координат»** приводятся основные определения. Подраздел 2.2. **«Примеры неголономных базисов на многообразиях»** посвящен описанию неголономных координат на группах Ли. Группа Ли представляет собой алгебраическую группу, с заданной на ней структурой дифференцируемого многообразия. При этом операции умножения и взятия обратного элемента являются дифференцируемыми. На группе ли определяются левоинвариантные векторные поля, задающие структуру алгебры Ли. Для определения алгебры Ли левоинвариантных векторных полей активно использовались такие понятия, как касательное отображение и скобка Ли векторных полей, рассмотренные в первом разделе работы.

В подразделе 2.3. **«Неголономное поле базисов как сечение расслоения касательных реперов»** голономные и неголономные координаты рассматриваются с единой точки зрения, в соответствии с которой в основе их определения лежит понятие сечения расслоения реперов.

В подразделе 2.4. **«Дифференцируемые многообразия с контактной структурой»** вводится понятие контактной структуры. Под контактной структурой на многообразии M нечетной размерности $n=2m+1$, $m > 1$, понимается тройка $(M, \vec{\xi}, \eta)$, где $\vec{\xi}$ и η - вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой. В работе доказывается, что вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$, где $\omega = d\eta$.

Подраздел 2.5. **«Адаптированные координаты на многообразиях с контактной структурой»** является основным подразделом выпускной работы. В начале подраздела определяется адаптированная карта $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n-1)$ на многообразия M с контактной структурой. Карта называется адаптированной к распределению D, если $\partial_{\mathrm{n}} = \vec{\xi}$, где D – ядро формы η. Пусть $P: TM \to D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$, и $k(x^\alpha)$ - адаптированная карта. В работе доказывается, что векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$.

Показывается также, что неголономному полю базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a,\ \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Доказывается, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Компоненты любого тензорного поля в базисе $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ являются неголономными координатами. Доказывается, что неголономные координаты сводятся к голономным координатам тогда и только тогда, когда распределение D – интегрируемо.

В последнем подразделе 2.6. «Неголономное поле базисов на многообразиях с контактной структурой как сечение подрасслоения расслоения касательных реперов» показывается, что неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ можно рассматривать как сечение подрасслоения главного расслоения реперов со структурной группой $Gl(n, R) \times \{1\}$.

Заключение

Использование координат в геометрических исследованиях способствует не только увеличению наглядности изложения материала, но и существенно упрощает проводимые выкладки и рассуждения. Во многих известных случаях удачный выбор системы координат позволяет принципиально облегчить проводимые рассуждения. В.В. Вагнер использовал неголономные координаты при построении геометрической теории механических систем со связями. Уравнения геодезических (траекторий движения механических систем) приобретали наиболее простой вид в специально выбранных координатах.