

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Компьютерные модели геодезических на поверхностях вращения

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 - Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Мезенцевой Полины Анатольевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, канд.пед.наук

А.В. Букушева

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доктор физ. – мат. наук,
профессор

В.В. Розен

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

ВВЕДЕНИЕ

Современная геометрия, также как и другие области математики, привлекает информационные технологии для решения своих задач. Компьютерные методы решения задач активно проникают в многочисленные приложения современной геометрии: инженерное дело, дизайн, распознавание образов и т.п. Одной из самых мощных компьютерных систем является Mathematica фирмы Wolfram Research. Сегодня Mathematica используется в различных областях науки и физике, химии, экономике, социологии, биологии, искусствоведении и других областях.

В данной работе показаны некоторые возможности использования системы Mathematica при решении задач дифференциальной геометрии.

Цель работы - разработать программы на языке Wolfram Language для построения геодезических на поверхностях вращения.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. изучить теорию поверхностей, в частности, поверхностей вращения;
2. рассмотреть геодезические на поверхностях вращения;
3. построить геодезические на торе, круговом цилиндре, круговом конусе.

Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников. Во введении описана актуальность работы, сформулирована цель и поставлены задачи работы. В первом разделе рассмотрены деривационные уравнения, теорема Гаусса. Во втором разделе дано определение ковариантного дифференцирования, рассматриваются свойства ковариантного дифференцирования, определяются геодезические. В третьем разделе дано определение геодезической кривизны, рассматривается теорема Клеро. В четвертом разделе составляются уравнения и визуализируются геодезические на поверхностях вращения: на торе, круговом цилиндре, круговом конусе, прямом геликоиде. Используя теорему Клеро, исследуется поведение геодезических линий на эллипсоиде. Программный код написан на языке программирования Wolfram Language. В заключении сделаны выводы по выполнению бакалаврской работы.

Основное содержание работы

В первом разделе рассматриваются деривационные уравнения.

Пусть $\Sigma = \left\{ M \in E^3 \mid \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in U \subset E^2 \right\}$ — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ — параметрическое задание поверхности.

Векторы $\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$, $\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$ и вектор нормали $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{||[\vec{r}_1, \vec{r}_2]||}$ определяют базис пространства E^3 .

Векторы $\vec{r}_{jk} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^k}$ выражаются через базисные векторы: $\vec{r}_{jk} = \Gamma_{jk}^i \vec{r}_i + b_{jk} \vec{n}$. Символы Γ_{jk}^i называются *символами Кристоффеля*, b_{jk} являются коэффициентами второй квадратичной формы.

Теорема (Уравнения Вейнгартена). *Имеют место равенства $\vec{n}_i = -b_{ij} g^{jk} \vec{r}_k$, где $\vec{n}_j = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^j}$.*

Вместе с уравнениями Гаусса $\vec{r}_{jk} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^k}$ уравнения $\vec{n}_i = -b_{ij} g^{jk} \vec{r}_k$ образуют полный набор деривационных уравнений. Можно записать их в

виде: $\frac{\partial}{\partial u^j} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$, где $A_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ -b_{1j} g^{j1} & -b_{1j} g^{j2} & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_{2j} g^{j1} & -b_{2j} g^{j2} & 0 \end{pmatrix}$, и символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$

Во втором разделе рассматриваются ковариантное дифференцирование и геодезические.

Пусть $\vec{v} = \vec{v}(t)$ гладкое векторное поле вдоль кривой $\gamma : u^i = u^i(t), t \in [\alpha, \beta]$ на поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$. Разложим векторное поле $\vec{v}(t)$ по базису в касательных плоскостях $\vec{v}(t) = v^i(t) \vec{r}_i(t)$, производная векторного поля вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v^i \vec{r}_i) = \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{du^j}{dt} \right) \vec{r}_k + b_{ij} v^i \frac{du^j}{dt} \vec{n}$$

Ковариантной производной $\frac{\nabla \vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{du^j}{dt} \right) \vec{r}_k$ векторного поля \vec{v} вдоль кривой γ на поверхности R^3 называется ортогональная проекция производной поля \vec{v} на касательную плоскость к поверхности.

Лемма 1. 1. *Отображение $(\vec{w}, \vec{v}) \rightarrow \nabla_{\vec{w}}\vec{v}$ линейно по \vec{v} и \vec{w} :*
 $\nabla_{\alpha_1\vec{w}_1+\alpha_2\vec{w}_2}\vec{v} = \alpha_1\nabla_{\vec{w}_1}\vec{v} + \alpha_2\nabla_{\vec{w}_2}\vec{v}$.

2. *Если $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, то $\nabla_{f\vec{w}}\vec{v} = f\nabla_{\vec{w}}\vec{v}$, $\nabla_{\vec{w}}f\vec{v} = D_{\vec{w}}f\vec{v} + f\nabla_{\vec{w}}\vec{v}$, где $D_{\vec{w}}f$ – производная функции f в направлении вектора \vec{w} : $D_{\vec{w}}f = \sum_j(\partial f/\partial u^j)w^j$.*

3. $\nabla_{\vec{r}_i}\vec{r}_j = \Gamma_{ji}^k\vec{r}_k$

4. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

5. *Производная скалярного произведения векторных полей вычисляется по формуле: $D_{\vec{w}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\nabla_{\vec{w}}\vec{v}_1, \vec{v}_2) + (\vec{v}_1, \nabla_{\vec{w}}\vec{v}_2)$*

Если на подмногообразии евклидова пространства задана билинейная операция на векторных полях и для нее выполняются утверждения 1 и 2 леммы, то говорят, что на подмногообразии задана аффинная связность. Связность определяется величинами Γ_{ij}^k . Построенная связность удовлетворяет двум дополнительным условиям: она симметрична, то есть для нее выполняется утверждение 4 леммы, и совместна с метрикой, то есть для нее выполняется утверждение 5 леммы.

Теорема. *Симметричная и совместная с метрикой аффинная связность единственна и определяется по первой квадратичной форме g_{ij} формулой*

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Векторное поле $\vec{v}(t)$ вдоль кривой γ параллельно, если ковариантная производная \vec{v} вдоль γ всюду равна нулю.

Кривая γ называется геодезической, если ее вектор скорости параллелен вдоль кривой $\frac{\nabla\dot{\gamma}}{dt} = 0$.

Геодезическая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

При $v \neq \text{const}$ систему дифференциальных уравнений геодезических линий $\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$ можно привести к уравнению: $\frac{d^2u}{dv^2} = -\Gamma_{22}^1 + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{du}{dv} + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^3$. Аналогично при $u \neq \text{const}$ си-

стему уравнений можно свести к уравнению $\frac{d^2v}{du^2} = -\Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{dv}{du} + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3$.

В третьем разделе рассматривается геодезическая кривизна и теорема Клеро.

Теорема Клеро. Для любой точки геодезической линии γ гладкой поверхности вращения Π выполняется равенство $\rho \cos \varphi = c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ – константа на геодезической γ , ρ – расстояние от произвольной точки $P \in \gamma$ до оси вращения, φ – угол между γ и параллелью в точке P .

В четвертом разделе приведены примеры геодезических линий на поверхностях вращения.

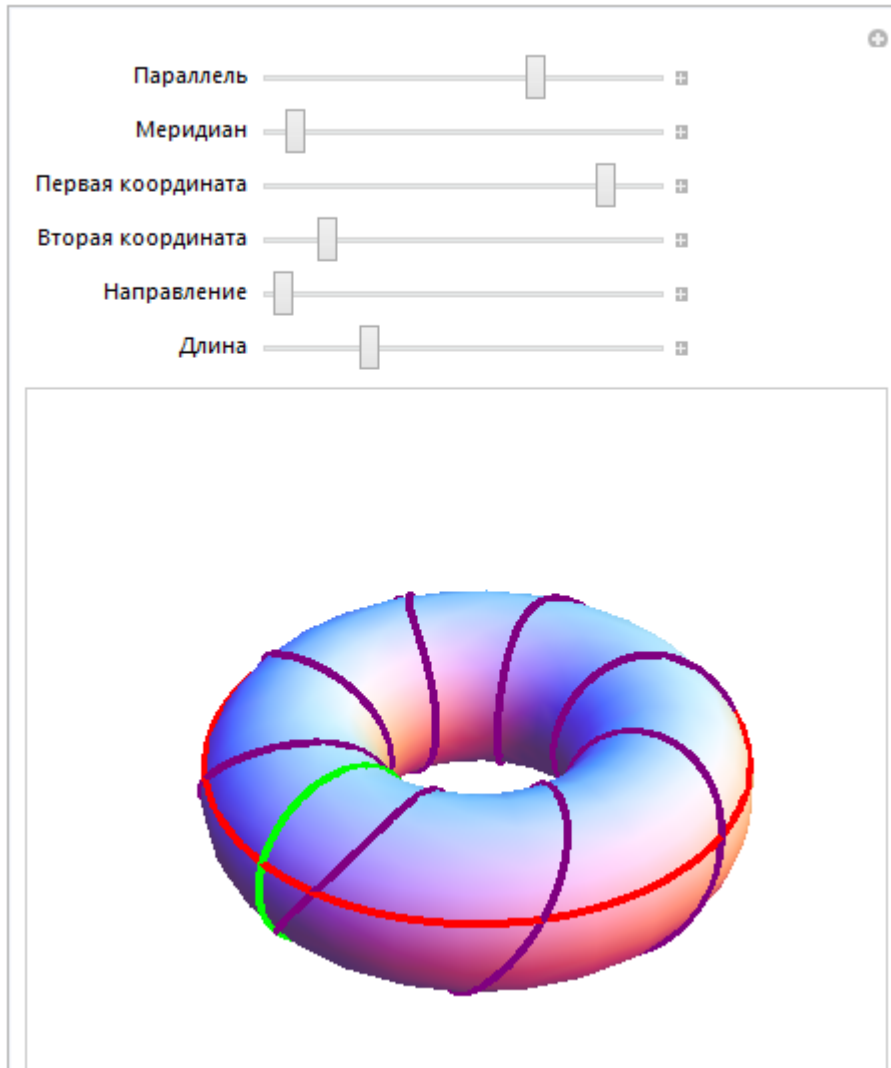
Найти геодезические на торе: $\vec{r} = ((a + b \sin v) \cos u, (a + b \sin v) \sin u, b \cos v)$.

Для нахождения геодезических кривых на поверхности воспользуемся формулой: $\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$. Имеем $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (a + b \sin v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$.

$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a + b \sin v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$. Найдем символы Кристоффеля: $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{b \cos v}{a + b \sin v}$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = \frac{-\cos v (a + b \sin v)}{b}$, остальные коэффициенты равны нулю.

Система дифференциальных уравнений имеет вид:
$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{du^2}{dt^2} = 0, \end{cases}$$

Геодезическими тора являются: меридианы, параллели, линии, которые проходят между двумя параллелями подобно синусоиде, линии, которые навиваются на тор.



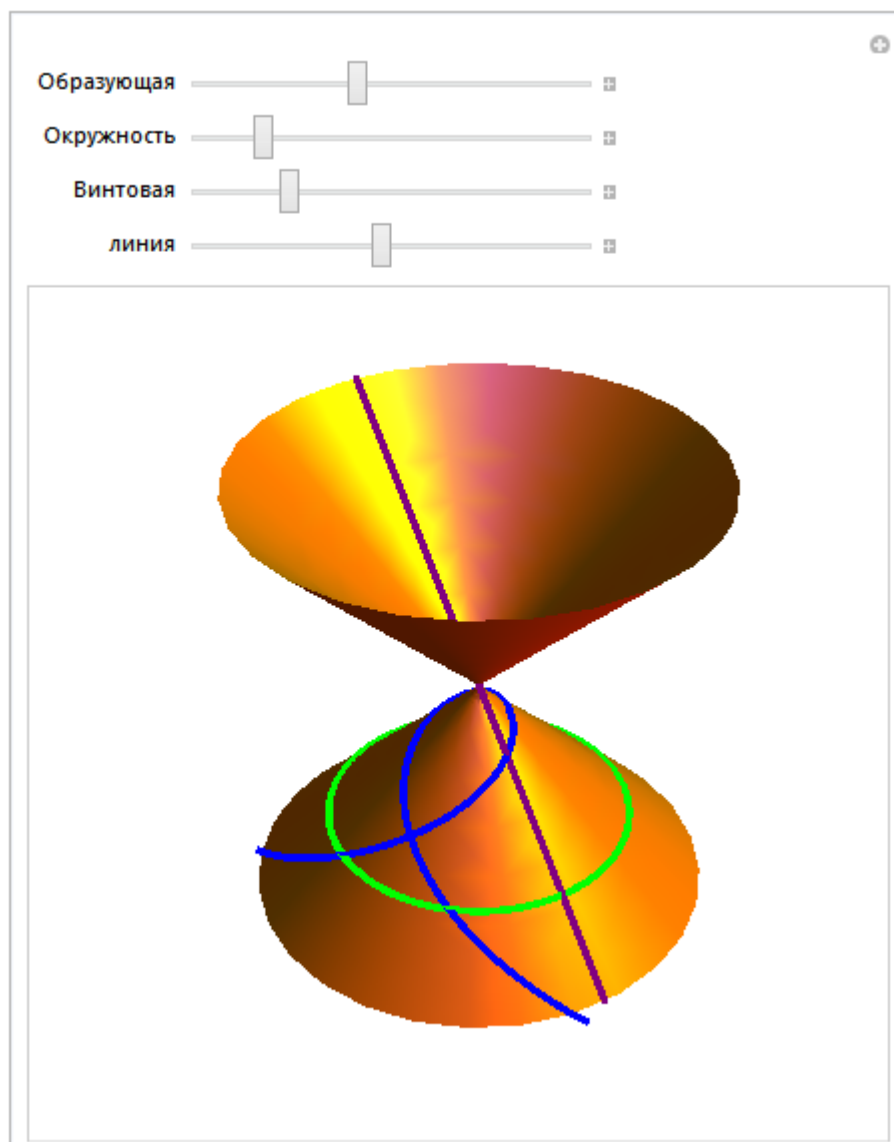
Составить и решить дифференциальное уравнение геодезических линий на круговом конусе с выколотой вершиной $\vec{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, u\}$.

$$\text{Имеем } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим символы Кристоффеля: $\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) = -\frac{u}{2}$, $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v} \right) = \frac{1}{u}$, остальные коэффициенты равны нулю.

$$\text{Получим: } \begin{cases} \ddot{u} + (-\frac{u}{2})\dot{v}\dot{v} = 0, \\ \ddot{v} + \frac{1}{u}\dot{v}\dot{u} = 0. \end{cases}$$

Геодезическими кругового конуса являются: прямолинейные образующие конуса, окружности, представляющие собой пересечение конуса с плоскостями, перпендикулярными оси конуса, винтовые линии на конусе.



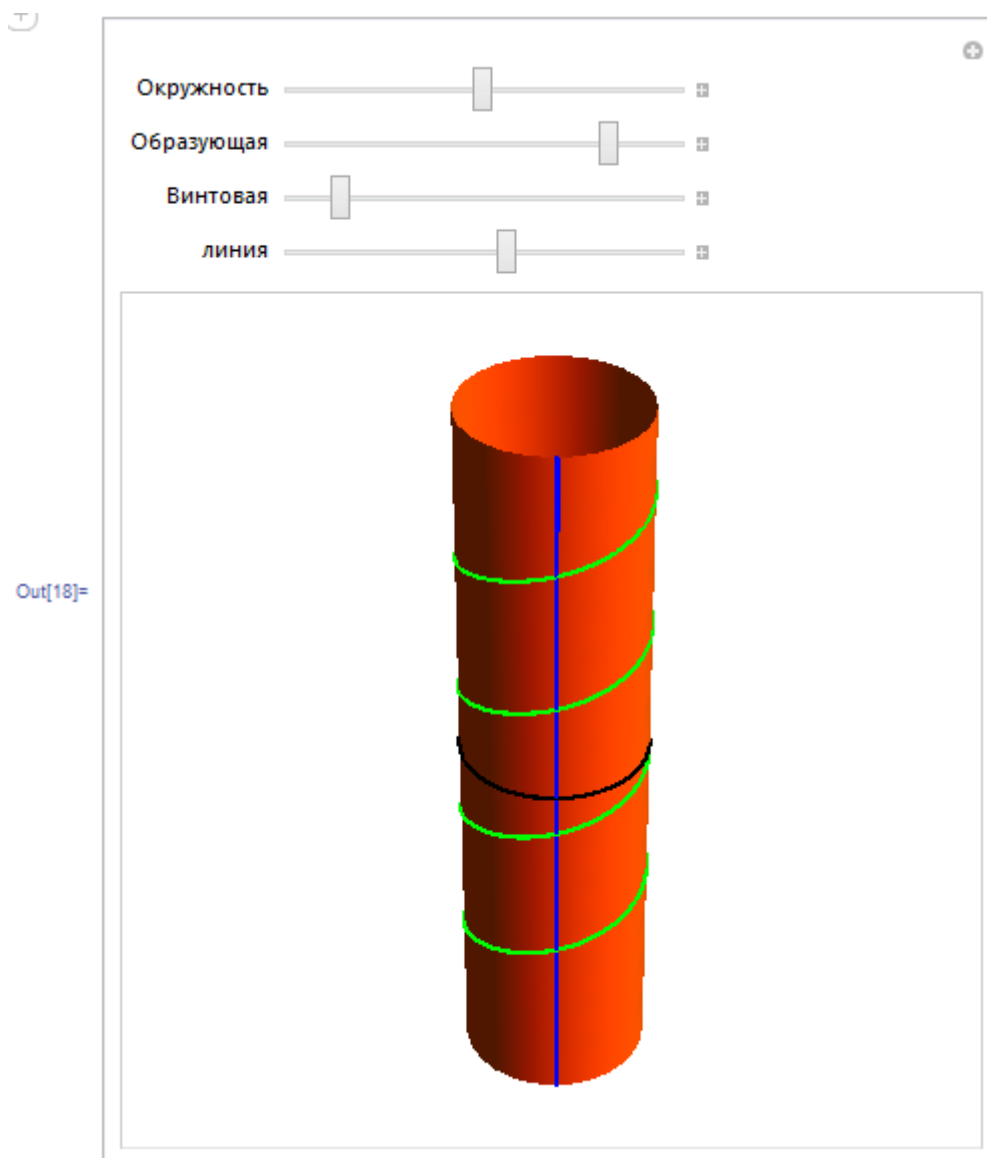
Найти геодезические линии на круговом цилиндре $\vec{r}(u, v) = \{a \cos v, a \sin v, u\}$.

Запишем уравнение геодезической линии на цилиндре $\frac{d^2u}{dt^2} = 0, \frac{d^2v}{dt^2} = 0$. Геодезическими кругового цилиндра являются: прямолинейные образующие цилиндра, окружности, представляющие собой пересечение цилиндра с плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, винтовые линия на цилиндре.

```

In[18]:= Manipulate[
  Show[ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u], v}, {u, 0, 2 π},
    {v, -4, 4}, PlotStyle → {Orange, Specularity[White, 40]},
    Axes → None,
    Mesh → None, Boxed → False, ImageSize → {400, 400}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], a}, {t, 0, 2 π},
    PlotStyle → {Black, Thickness[0.015]}],
  ParametricPlot3D[{Cos[t + c], Sin[t + c], t*d},
    {t, -4 π, 4 π}, PlotStyle → {Green, Thickness[0.015]}],
  ParametricPlot3D[{Cos[b], Sin[b], t}, {t, -4, 4},
    PlotStyle → {Blue, Thickness[0.015]}]],
  {{a, 0, "Окружность"}, -4, 4},
  {{b, 5 π / 3, "Образующая"}, 0, 2 π},
  {{c, π / 4, "Винтовая"}, 0, 2 π}, {{d, 1 / 4, "линия"}, -2, 2}]

```



Найти геодезические линии на прямом геликоиде $\vec{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, hu\}$.

Найдем матрицу к обратной матрице $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + h^2 \end{pmatrix}$, $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+h^2} \end{pmatrix}$.

Вычислим символы Кристоффеля: $\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) = -u$, $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v} \right) = \frac{1}{u^2+h^2}$.

Получим:
$$\begin{cases} \ddot{u} + (-u)\dot{v}\dot{v} = 0, \\ \ddot{v} + \frac{1}{u^2+h^2}\dot{v}\dot{u} = 0. \end{cases}$$
 Заметим, что геодезическими линиями

являются прямолинейные образующие, т.е. линии $v = const$. Считая теперь, $dv \neq 0$ получаем дифференциальное уравнение геодезических линий: $\frac{d^2u}{dv^2} - \frac{2u}{h^2+u^2} \left(\frac{du}{dv} \right)^2 - u = 0$. Для решения уравнения введем новые переменные, полагая u независимой переменной, а $p = \frac{du}{dv}$ — функцией от u . Тогда уравнение примет вид $p \frac{dp}{du} - \frac{2u}{h^2+u^2} p^2 - u = 0$. Полагая $z = p^2$, получаем $\frac{dz}{du} - \frac{4u}{h^2+u^2} z - 2u = 0$. Общее решение этого уравнения есть $z = (h^2 + u^2)^2 (C_1 - \frac{1}{h^2+u^2})$, откуда $v = \int \frac{du}{(h^2+u^2)\sqrt{C_1 - \frac{1}{h^2+u^2}}} + c_2$.

Пользуясь теоремой Клеро, исследовать поведение геодезических линий поверхности эллипсоида вращения.

Пусть r_0 — радиус самой широкой параллели L эллипсоида вращения, а M_0 — точка на этой параллели. Рассмотрим геодезическую, проходящую через точку M_0 под углом $\mu_0 = 0$ параллели L . По теореме Клеро вдоль этой геодезической

$$\rho \cos \mu = r_0;$$

отсюда следует, что

$$\rho = r_0, \cos \mu = 1.$$

Таким образом, $\mu_0 = 0$ и геодезическая совпадает с параллелью L .

Возьмем геодезическую, пересекающую параллель под прямым углом, т.е. $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$. По теореме Клеро $\rho \cos \mu = 0$; следовательно, $\mu = \frac{\pi}{2}$. и геодезическая совпадает с меридианом. Пусть $0 < \mu_0 < \frac{\pi}{2}$. Обозначим $r_0 \cos \mu_0 = C_0$, полу-

чим, что вдоль геодезической $\rho \cos \mu = C_0$. Отсюда следует, что она пересекает все параллели эллипсоида с радиусом $\rho < C_0$ под ненулевым углом и далее, касаясь параллели с радиусом $\rho = C_0$, снова уходит в сторону параллели L .

Заключение

Теория геодезических линий интересна с прикладной точки зрения и для современных исследований, поскольку движение многих типов механических систем, а также тел или частиц в гравитационных и электромагнитных полях, в сплошной среде часто происходит по траекториям, которые можно рассматривать как геодезические линии некоторых пространств трех и более измерений.

В результате выполнения данной работы были решены следующие задачи:

- рассмотрены деривационные уравнения, теорема Гаусса, ковариантное дифференцирование, геодезические, геодезическая кривизна, теорема Клеро;
- составлены уравнения и построены геодезические на поверхностях вращения: на торе, круговом цилиндре, круговом конусе, прямом геликоиде;
- используя теорему Клеро, исследованы поведения геодезических линий на эллипсоиде.

Для вычислений и визуализации линий был написан программный код на языке программирования Wolfram Language.

Полученные результаты бакалаврской работы можно использовать в курсе компьютерной геометрии в вузах.