Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Линейные доупорядочения порядка

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

Механико-математический факультет

РЯБОВА АНТОНА СЕРГЕЕВИЧА

Научный руководитель
зав.каф. д.ф.-м.н. профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
подпись, ,дата

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
подпись, дата

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Во многих вопросах алгебры, а также в прикладных направлениях (например, в теории принятия решений, в задачах многокритериальной организации), возникают проблемы линейных доупорядочений заданного частичного порядка. Принципиальная возможность линейных доупорядочений произвольного порядка обосновывается теоремой Шпильрайна, доказательство которой основано на лемме Цорна и поэтому имеет неконструктивный характер. Эту теорему впервые сформулировал польский математик Эдвард Шпильрайн в 1930 году. В случае конечного упорядоченного множества имеется простой алгоритм, предложенный в работе Розена В.В. «Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия решений)». Далее оказывается, что приведенный алгоритм тесно связан с построением идеалов упорядоченного множества. Эти факты послужили основой содержания настоящей бакалаврской работе, которая имеет следующую структуру.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, а также содержит четыре рисунка. Список использованной литературы содержит 7 наименований.

В первой главе работы рассматриваются основные понятия и определения теории упорядоченных множеств, которые в дальнейшем требуются для изложения основного материала. В частности, рассмотрены свойства максимальных и минимальных элементов, сформулирован принцип двойственности для упорядоченных множеств, доказаны свойства изотонности операции супремума и антиизотонности оператора инфимума.

Во второй главе работы исследуются вопросы существования и построения линейных доупорядочений порядка. В частности, приводится алгоритм перечисления всех линейных доупорядочений конечного упорядоченного множества. Алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге строим вспомогательный граф. На втором шаге составляется таблица для нахождения всех линейных доупорядочений подмножеств (кроме пустого), являющихся вершинами графа. В нижнем блоке таблицы получаются все линейные доупорядочения…Этот алгоритм пояснен подробно рассмотренным примером.

В третьей главе работы приводятся доказательства некоторых формул для подсчета числа линейных доупорядочений упорядоченных множеств. Особо выделен случай подсчета числа линейных доупорядочений для упорядоченной суммы упорядоченных множеств. В частности, формула для подсчета числа линейных доупорядочений линейно упорядоченной суммы имеет вид:

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r ,$$

где N_k

число линейных доупорядочений упорядоченного множества, а N число линейных доупорядоченных их линейно упорядочен ной суммы.

Формула для подсчета числа линейных доупорядочений дискретной суммы упорядоченных множеств имеет вид:

$$N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r$$

Где N_k - число линейных доупорядочений упорядочного множества

Доказательство этих формул проводится методом полной математической индукции по числу компонент упорядоченной суммы.

В четвертой главе работы рассматриваются идеалы упорядоченного множества.

Доказано, что отображение $X \to X^{\downarrow}$, которое каждому подмножеству $X \subseteq A$ ставит в соответствие порожденный им идеал $X^{\downarrow}$, является операцией замыкания. Это означает выполнение следующих условий:

1) Экстенсивность: $X \subseteq X^{\downarrow}$.

2) Изотонность: $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^{\downarrow} \subseteq X_2^{\downarrow}$.

3) Идемпотентность. $(X^{\downarrow})^{\downarrow} = X^{\downarrow}$.

Доказано, что пересечение и объединение любого семейства идеалов снова является идеалом, в силу чего идеалы упорядоченного множества образуют полную решетку.

Далее показана связь между линейными доупорядочениями порядка и идеалами данного упорядоченного множества.

Краткое содержание работы:

В Разделе 1 приведены основным понятиям теории упорядоченных множеств.

Определение. Упор. Множеством называется произвольное непустое множество A, на котором задано *отношение порядка* ω (т. е. рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение). Такое упорядоченное множество может быть задано в виде пары $\langle A, \omega \rangle$. Иногда мы будем использовать инфиксное обозначение порядка и строгого порядка, полагая для любых элементов $a, a' \in A$:

$$a \le^{\omega} a' \Leftrightarrow (a, a') \in \omega,$$

$$a <^{\omega} a' \Leftrightarrow (a, a') \in \omega,\ a \ne a'.$$

Вначале вводится понятие упорядоченного множества, рассматриваются примеры упорядоченного множества, и формулируется принцип двойственности.

В подразделе «диаграмма отношения порядка» дается определение отнорщения покрывания и на его основе вводится понятие диаграммы и дается правило (Правило I) для отношения порядка, заданного на конечном множестве: диаграмма отношения порядка $\geqslant$ (или, что то же самое, диаграмма упорядоченного множества (A, $\geqslant$)) строится следующим образом. Элементы подмножества A изображаются точками на плоскости и всякие две точки x,y∈A, для которых выполняется $x \prec y$ соединяются наклонным отрезком, идущим вверх от x к y. Так же вводятся (Правило I.1 и Правило I.2) для условия и соотношения a<b.

В подразделе «максимальные и минимальные элементы, условие минимальности», рассматривается произвольное упорядоченное множество (A, ⩾) и дается определение максимального и минимального элемента и сформулир. Нек. их св-ва.

Также в разделе даются такие понятия и определения, как условие минимальности, линейно упорядоченное множество, супермум и инфимум (с доказательством), и, в заключении раздела, определение минорантной (мажорантной) полурешетки.

Раздел 2 посвящен алгоритму построения всех линейных доупорядочений порядка. Этот раздел начинается с формулировки теоремы Шпильрайна. Доказательство теоремы Шпильрайна основан на лемме Цорна и потому является неконструктивным, т.е. не дает способ построения линейного доупорядочения порядка. Далее предстояло-исключить дано описание построения всех линейных доупорядочений конечного упорядоченного множества. На примере II.2 мы рассмотрели упорядоченное множество (Рисунок II.1), построили вспомогательный граф и составили таблицу (Таблица II.1) для нахождения всех линейных доупорядочений подмножеств, являющиеся вершинами графа и записали всевозможные линейные доупорядочения множества.

Раздел III посвящен подсчету числа линейных доупорядочений упорядоченных множеств.

В подразделе «подсчет с помощью вспомогательного графа» рассматривается формулы для подсчета количества линейных доупорядочений(см. выше).

В подразделе «упорядоченная сумма упорядоченных множеств» рассматривается способ подсчета числа линейных доупорядочений таких упорядоченных множеств, которые получаются с помощью композиции специального вида, называемой упорядоченной суммой упорядоченных множеств. Были рассмотрены два случая важных частичных случая такой композиции, отношение порядка > на множестве индексов линейно, и отношение порядка на множестве индексов тривиально.

Была поставлена задача нахождения числа линейных доупорядочений для упорядоченной суммы упорядоченных множеств, зная число элементов и число линейных доупорядочений для каждой ее компоненты.

Также был рассмотрен пример подсчета дискретной суммы упорядоченных множеств. (см. выше)

Приведенный пример показывает, что число линейных доупорядочений для упорядоченной и суммы и, особенно, для дискретной суммы растет катастрофически. Например,…

Раздел IV.

В подразделе «операция идеального замыкания» дано определение идеала: проверены и доказаны такие свойства, как экстенсивность, изотонность, и идемпотентность. (см. выше) Далее сформулировано и доказано определение идеала.

Пересечение и объединение любого семейства идеалов – идеал

Док-во.

Доказать, например, что:

Объединение идеалов – снова идеал: пусть $(X_i^{\downarrow}) i \in I$ - семейство идеалов

Проверим: $\bigcup_{i \in I} X_i^{\downarrow}$ - это снова идеал

Покажем, что

$$\bigcup_{i\in I} X_i^{\downarrow} = (\bigcup X_1)^{\downarrow} (*)$$

$$X_i \subseteq \bigcup_{i\in Ii} X_I \overset{с-во\ изотонности\ \downarrow}{\Rightarrow} X_i^{\downarrow} \subseteq (\bigcup X_i)^{\downarrow}, \bigcup_{i\in I} X_i^{\downarrow} \subseteq (\bigcup X_i)^{\downarrow}.$$

Покажем:

Обратное включение: Пусть $a \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\downarrow}$, то есть $(\exists x \in \bigcup_{i\in I} X_i) a \leq x,$ тогда по определению $(\exists i \in I)(\exists x \in X_i) a \leq x,$ то есть $a \in X_i^{\downarrow}, т.е.\ a \in \bigcup_{i\in I} X_i^{\downarrow}.$

Два включения дают равенство:

$\bigcup_{i\in I} X_i^{\downarrow} = (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\downarrow}$ из которого следует требуемое.

Аналогично, пересечение идеалов – снова идеал. Поэтому множество всех идеалов образует полную решетку, в которой инфимум любого семейства идеалов – это их теортетико-множественное пересечение, а супремум – теоретико-множественное объединение.

В подразделе «построение идеалов упорядоченного множества удалением максимальных элементов» доказана теорема IV.1.- *В конечном упорядоченном множестве* $\langle A, \omega \rangle$**:**

1) *подмножество, получающееся в результате удаления из идеала его максимального элемента, снова является идеалом*;
2) *всякий идеал, не совпадающий с* A*, может быть получен за конечное число шагов из множества* A *в результате процедуры последовательного удаления максимальных элементов.*

В подразделе «решетка идеалов упорядоченного множества» показано, что нахождение линейных доупорядочений порядка тесно связано со структурой решетка идеалов упорядоченного множества. см. выше)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы является рассмотрения комплекса вопросов, связанных с понятием линейного доупорядочения порядка. Логической базой здесь служит теорема Шпильрайна, доказательство которой основано на лемме Цорна и потому не является конструктивным. В случае конечного упорядоченного множества существует удобный алгоритм перечисления всех линейных доупорядочений заданного порядка. В работе подробно рассмотрен этот алгоритм, а также правило подсчета числа линейных доупорядочений для упорядоченных множеств некоторых специальных видов. Показано, что построение линейных доупорядочений тесно связано с понятием идеала упорядоченного множества.