МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «ФУНКЦИИ ЦЕЛОЙ И ДРОБНОЙ ЧАСТИ ЧИСЛА»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направление 44.04.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Аникьевой Екатерина Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. н., доцент ________________ Е.В. Разумовская

Зав.кафедрой
д.ф.-м. н., профессор ________________ Д.В. Прохоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире информационные технологии играют огромную роль в жизни человека, и всё чаще стали использоваться в повседневном образовательном процессе наравне с традиционными формами обучения. С появлением интернета появилась возможность прямого доступа к различным ресурсам, находящимся в глобальной сети. Активное использование таких технологий в образовании определило место дистанционному обучению. Дистанционное обучение – обучение, при котором все или большая часть учебных процедур осуществляется с использованием современных информационных технологиях при территориальной разобщенности преподавателя и ученика.

При написании работы преследовались следующие цели:

- использование в образовательном процессе дистанционных образовательных технологий и средств электронного обучения, позволяющих осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе;

- оптимизация процесса обучения, благодаря возможности обмена научными наработками между членами педагогического состава.

Задачи магистерской работы:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам электронного образовательного курса и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования;

- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно-измерительными материалами по теме «Функции целой и дробной части действительного числа», реализуемой в системе дистанционного образования;

- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

Планируемые результаты и достижения при использовании электронного образовательного курса по теме «Функции целой и дробной части действительного числа»:

1. Приобретение и освоение учащимися теоретической информации, а также ознакомление с типовыми задачами по заданной теме;
2. Контроль усвоения теоретических знаний учащихся, благодаря ответам на контрольные вопросы после прохождения обучения;
3. Применение полученных знаний при решении геометрических задач;
4. Совершенствование коммуникативных навыков, посредством применения на уроках групповой формы работы и работы в парах
5. Формирование универсальных учебных действий, таких как планирование, целеполагание, анализ собственной работы.

Основное содержание работы

Магистерская работа состоит из введения, пяти блоков, заключения, списка использованных источников.

Во **введении** обоснована актуальность исследования, кратко описана степень его разработанности, сформулированы цель, задачи, методы исследования, практическая значимость, описана структура магистерской работы по частям.

В **первом блоке «Историческая справка»** описана история возникновении понятий «антье» и «мантисса»: кем были открыты, о жизни великих математиков (внесших вклад в развитие данной тематики).

Функции целой и дробной части действительного числа исследовались такими известными математиками, как Иоганн Карл Фридрих Гаусс, Адриен Мари Лежандр и Петер Густав Лежён Дирихле.

Термин «антье», предложенный Лежандром, используется уже более двухсот лет. Данное понятие понадобилось ему при выводе формулы количества вхождений простого числа p в каноническое разложение числа $n!$. Но обозначение антье числа x, т.е. $[x]$ ввел Гаусс в 1808 г.

Также если легенда о Дирихле считать историческим фактом (Дирихле сформулировал принцип, носящий его имя, при решении «задачи о расположении $\{n\alpha\}$), то принцип Дирихле обязан своим появлением мантиссе.

Рассмотрим далее антье и мантиссу как функции действительного аргумента, т.е. рассмотрим:

$$f(x) = [x] \text{ и } f(x) = \{x\},$$

где $f(x)$ – функция действительного аргумента;

$[x]$ – антье;

$\{x\}$ – мантисса.

Во **второй части «Основной теоретический материал»** приведены общие сведения об антье и мантиссе (примеры и графики функций), а также представлены различные виды уравнений, неравенств и систем уравнений с использованием мантиссы. В каждом подразделе блока рассматривается теоретический материал, а также приводятся примеры решения с его использованием.

Определение 3. Антье *[x]* (целой частью действительного числа) называется наибольшее целое число, не превосходящее x, т.е.:

$$[x] = \max\{n\epsilon Z | n \leq x\}$$

Пример 1. Найти [2,2].

Решение: $[2{,}2] = 2$.

График функции $y = [x]$ представлен на рисунке 1.

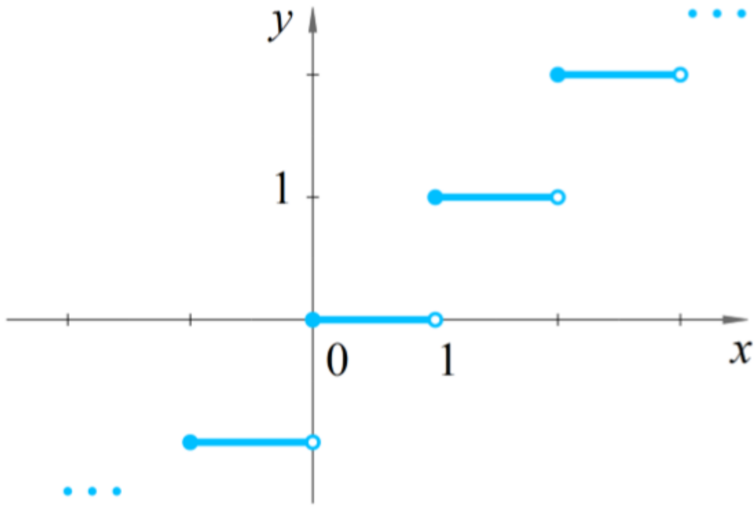

Рисунок 2.1 – График функции антье

Определение 4. Мантиссой *{x}* **(**дробной частью действительного числа) называется число, равное разности между числом x и антье [x], т.е.:

$$\{x\} = x - [x]$$

Пример 4. Найти $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Решение: $\left\{-\frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{3}$.

График функции $y = \{x\}$ представлен на рисунке 2.3.

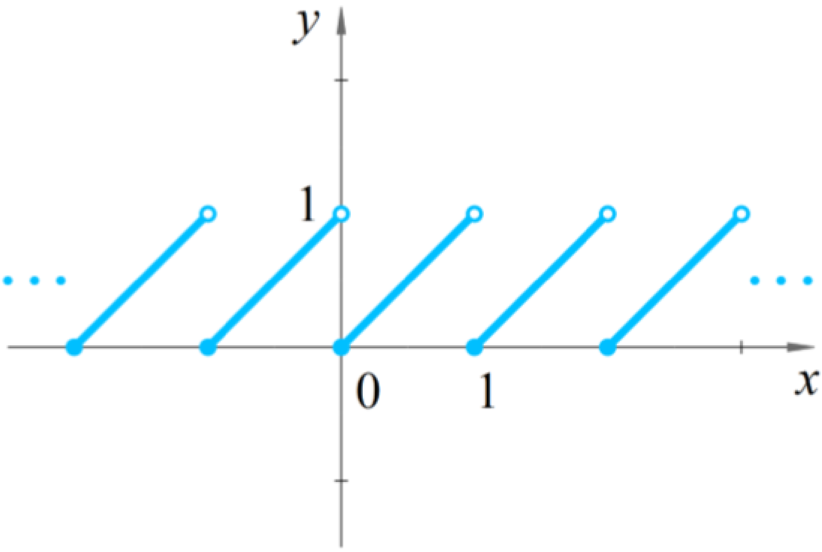

Рисунок 2.3 – График функции мантиссы

Решение простейших уравнений.

К простейшим уравнениям относятся уравнения вида $[f(x)] = a$ и $\{f(x\} = a$. Уравнения вида $[f(x)] = a$ решаются по определению:

$$a \leq f(x) < a + 1$$

где a – целое число. Если a – дробное число, то такое уравнение не будет иметь корней.

Уравнения вида $\{f(x\} = a$ решаются по определению:

$$f(x) = a + n$$

где $n \in Z_{\geq 0}$.

Пример 8. Решить уравнение $[x + 1{,}3] = -5$

Решение: По определению такое уравнение преобразуется в неравенство

$$-5 \leq x + 1{,}3 < -4,$$

$$-6{,}3 \leq x < -5{,}3$$

Ответ: $x \in [-6{,}3; -5{,}3)$.

Решение простейших неравенств.

Назовём основными неравенствами с $[x]$ и $\{x\}$ следующие соотношения: $[x] > b$ и $\{x\} > b$.

Таблица 5 – Результаты исследований неравенств

Вид неравенства	Множество значений
$[x] \geq b$, $b \in Z$	$x \geq b$
$[x] \geq b$, $[x] > b$, b – любое	$x \geq [b] + 1$
$[x] \leq b$, b - любое $[x] < b$, b - любое	$x < [b] + 1$
$[x] < b$, $b \in Z$	$x < b$
$\{x\} \geq b$, $\{x\} > b$, $b \geq 1$	Решений нет
$\{x\} \geq b$, $\{x\} > b$, $b < 0$	$(-\infty; +\infty)$
$\{x\} \geq b$, $\{x\} > b$, $0 \leq b < 1$	$n + b \leq x < 1 + n$ $n + b < x < 1 + n$, $n \in Z$
$\{x\} \leq b$, $\{x\} < b$, $b \geq 1$	$(-\infty; +\infty)$
$\{x\} \leq b$, $\{x\} < b$, $b < 0$	Решений нет
$\{x\} \leq b$, $\{x\} < b$, $0 \leq b < 1$	$n \leq x \leq b + n$ $n < x \leq b + n$, $n \in Z$

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{2[x] - 5}{3[x] - 1} > 1$$

Решение: Заменим $[x]$ на переменную a, где a – целое.

$$\frac{2a - 5}{3a - 1} > 1,$$

$$\frac{2a - 5}{3a - 1} - 1 > 0,$$

$$\frac{2a - 5 - 3a + 1}{3a - 1} > 0,$$

$$\frac{-a - 4}{3a - 1} > 0$$

Используя метод интервалов, находим

$$\begin{cases} a > -4 \\ a < 1/3' \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] > -4 \\ [x] < 1/3 \end{cases}$$

Для решения полученных неравенств воспользуемся составленной таблицей:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-3; 1)$

Решение уравнения вида *[f(x)] = g(x)*.

Характерной чертой данного вида уравнений является целочисленность правой части.

Существует несколько способов решения данного уравнения:

1) Использование обратной функции к $g(x)$:

Т.к. уравнению удовлетворяют значения неизвестной, при которых $g(x)$ целочисленная, то выполним замену $n = g(x),$ где $n \in Z$

Предположим, что функция $g(x)$ строго монотонная. Тогда функция $g(x)$ обратима, то есть можно однозначно выразить x через n:

$$x = g^{-1}(n).$$

В результате двойной замены заданное уравнение становится уравнением с целочисленной неизвестной:

$$\left[f\left(g^{-1}(n)\right)\right] = n,$$

$$\left[f\left(g^{-1}(n)\right) - n\right] = 0$$

Уравнение $\left[f\left(g^{-1}(n)\right) - n\right] = 0$ равносильно двойному целочисленному неравенству:

$$0 \leq f\left(g^{-1}(n)\right) - n < 1$$

Решая данное неравенство, находим n и определяем количество решений первоначального уравнения $[f(x)] = g(x)$, а после обратной замены вычисляем решения исходного уравнения.

Применимость данного метода ограничена обратимостью функции $g(x)$, а также сложностью функции $f\left(g^{-1}(x)\right)$, при которой дальнейшее решение сопряжено излишними вычислительными трудностями.

Пример 12. Решить уравнение $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$

Решение: Заменим правую часть уравнения на новую переменную n и выразим отсюда x

$$\frac{16(x+1)}{11} = n,$$

$$11n = 16x + 16,$$

$$16x = 11n - 16,$$

$$x = \frac{11n - 16}{16}$$

В результате двойной замены, исходное уравнение преобразуется:

$$\left[\frac{8(\frac{11n-16}{16}) + 19}{7}\right] = n,$$

$$\left[\frac{\frac{11n-16}{2} + 19}{7} - n\right] = 0,$$

$$0 \leq \left[\frac{\frac{11n-16}{2} + 19 - 7n}{7}\right] < 1,$$

$$0 \leq \left[\frac{5{,}5n - 8 + 19 - 7n}{7}\right] < 1,$$

$$0 \leq \left[\frac{11 - 1{,}5n}{7}\right] < 1$$

Левое неравенство дает $n \leq 7\frac{1}{3}$. Т.к. n принимает только целые значения, то $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Правое неравенство дает $n > 2\frac{2}{3}$. Т.к. n принимает только целые значения, то $n \geq 3$.

Обобщая все решения, получаем $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

Подставим полученное n и найдем 5 решений при $n = 3, 4, 5, 6, 7$:

$$x = \frac{11 * 3 - 16}{16} = 1{,}0625,$$

$$x = \frac{11 * 4 - 16}{16} = 1{,}75,$$

$$x = \frac{11 * 5 - 16}{16} = 2{,}4375,$$

$$x = \frac{11 * 6 - 16}{16} = 3{,}125,$$

$$x = \frac{11 * 7 - 16}{16} = 3{,}8125$$

Ответ: $1{,}0625;\ 1{,}75;\ 2{,}4375;\ 3{,}125;\ 3{,}8125$

Решение уравнения вида *[f(x)] =[g(x)]*.

Самым распространенным способом решения данного вида уравнения является использование свойства антье $n \le [x] < n + 1$

И в правой, и в левой части исходного уравнения стоит функция антье. Воспользовавшись указанным свойством, выполняется равносильный переход к системе неравенств с целочисленным параметром n и решается система относительно переменной x:

$$\begin{cases} n \le f(x) < n + 1 \\ n \le g(x) < n + 1 \end{cases}$$

Пример 15. Решить уравнение $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[x - \frac{1}{2}\right]$

Решение: Перейдем к системе неравенств с целочисленным параметров

$$\begin{cases} n \le \dfrac{x}{2} < n + 1 \\ n \le x - \dfrac{1}{2} < n + 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2n \le x < 2n + 2 \\ n + \dfrac{1}{2} \le x < n + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Полученная система совместна, если

$$\begin{cases} 2n < n + \dfrac{3}{2} \\ n + \dfrac{1}{2} < 2n + 2 \end{cases},$$

$$-\frac{3}{2} < n < \frac{3}{2}$$

Т.е. $n = -1, 0, 1$.

Подставим полученные $n = -1, 0, 1$. Если $n = -1$, то:

$$\begin{cases} -2 \le x < 0 \\ -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$-\frac{1}{2} \le x < 0$$

Если $n = 0$, то:

$$\begin{cases} 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}$$

Если $n = 1$, то:

$$\begin{cases} 2 \le x < 4 \\ \frac{3}{2} \le x < \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$2 \le x < \frac{5}{2}$$

Объединяя все промежутки, получим: $-\frac{1}{2} \le x < 0, \frac{1}{2} \le x < \frac{5}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2} \le x < 0, \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \le x < \frac{5}{2}$

Решение уравнения вида *{f(x)} = {g(x)}*.

Поскольку дробные части функций $f(x)$ и $g(x)$ равны, то разность $f(x)$и $g(x)$ - это целое число, верно и обратное высказывание, то есть $\{f(x) - gx=0$. Получаем равносильность уравнений

$$\{f(x)\} = \{g(x)\} \leftrightarrow \{f(x) - g(x)\} = 0$$

Данный прием позволяет свести уравнение $\{f(x)\} = \{g(x)\}$ к простейшему уравнению с мантиссой.

Пример 16. Про некоторое число x известно, что

$$\{32x\} = \{200x\} \text{и } \{2x\} = \{100x\}$$

Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$

Доказательство: Воспользуемся формулой равносильного перехода

$$\begin{cases} \{32x\} = \{200x\} \\ \{2x\} = \{100x\} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \{168x\} = 0 \\ \{98x\} = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{168} \\ x = \dfrac{n}{98} \end{cases}$$

Определим k:

$$\frac{k}{168} = \frac{n}{98} \leftrightarrow \frac{k}{12} = \frac{n}{7}$$

Получили k кратное 12. Пусть $k = 12m,$ где $m \in Z$. Тогда $x = \frac{m}{14}$ является решением обоих уравнений.

Покажем, что $\{x\} = \{155x\}$ для $x = \frac{m}{14}$

$$\{155x\} = \left\{155 * \frac{m}{14}\right\} = \left\{11m + \frac{m}{14}\right\} = \left\{\frac{m}{14}\right\} = x$$

Решение систем уравнений

Существует два способа решения систем уравнений, содержащих антье и/или мантиссу. Рассмотрим каждый из них на примерах.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8 \\ 3[x] - [y] = 1 \end{cases}$$

Решение: Данную систему решим методом сложения. Домножим второе уравнение системы на 3, получим:

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8 \\ 9[x] - 3[y] = 3 \end{cases}$$

После сложения двух уравнений получаем $11[x] = 11$. Отсюда $[x] = 1$. Подставим это значение в первое уравнения системы и получаем $[y] = 2$.

$[x] = 1$ и $[y] = 2$ - решения системы. То есть $x \in [1; 2), y \in [2; 3)$.

Значит, $x = 1, y = 2$

Ответ: $(1; 2)$

В **третьей части «Контрольные вопросы»** приведены контрольные вопросы в форме тестирования, например:

№ 4 Какое из чисел 5; -4; 0; ½ являются натуральными:

а) -4 в) 5

б) 0 г) 1/2

№ 5 Чему равен период дроби $\frac{15}{55} = 0{,}25454$:

а) 2 в) 545

б) 25 г) 54

№ 6 Какие арифметические операции можно использовать при работе с действительными числами:

а) умножение

б) сложение и вычитание

в) все 6 операций

г) ничего из вышеперечисленного

Ключ к тесту прилагается в таблице.

В **четвертой части «Тренировочные задачи»** - представлены тесты трех уровней сложностей

- базового уровня сложности (на применение элементарных свойств антье и мантиссы)

- среднего уровня сложности, в которых содержатся задания на решение различных уравнений и неравенств

- повышенного уровня сложности, в которых содержатся задания на решение систем с антье и мантиссой

<u>Несколько заданий из базового уровня сложности:</u>

Задание 1. Укажите множество значений переменной x, если известно, что целая часть x равна 8.

а) [-8;8] б) (8;9] в) [8;9)

Задание 2. Пусть x равно -3,1. Найдите значение выражения $[x-10]$.

а) -13,1 б) -13 в) 13,1

Задание 3. Найдите значение выражения: $\{[17{,}3]\}$

а) 0 б) 0,3 в) 3

Несколько заданий из среднего уровня сложности:

Задание 1. Решите уравнение $\left[\frac{x^2-x+2}{4}\right]=1$

Задание 2. Решите уравнение $\left[\sqrt{2}\sin x\right]=1$

Задание 3. Решите уравнение $\{2^{x-1}\}=\frac{1}{2}$

Несколько заданий из повышенного уровня сложности:

Задание 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2[x]+[y]=2\\ [x]-2[y]=6\end{cases}$$

Задание 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}[x]+[y]=1\\ x|x|+y|y|=1\end{cases}$$

В **пятой части «Решение тренировочных задач»** - представлено полное решение тренировочных задач:

- для базового уровня представлены ключи к тестовой части и подробное объяснение полученных ответов;

- для среднего уровня представлено подробное решение уравнений и неравенств, содержащих антье и мантиссу

- для повышенного уровня сложности представлено полное решение систем, содержащих уравнения с антье и мантиссой

Например, решение тренировочных заданий базового уровня:

Задание 1.

$$[x]=8,$$

$$8 \leq x < 8 + 1,$$

$$8 \leq x < 9$$

Ответ: в)

Задание 2.

$$[-3{,}1 - 10] = [-13{,}1] = -13$$

Ответ: б)

Задание 3.

$$\{[17{,}3]\} = \{17\} = 0$$

Ответ: а)

<u>Например, решение тренировочных заданий среднего уровня:</u>

Задание 1.

Исходное уравнение равносильно двойному неравенству

$$1 \leq \frac{x^2 - x + 2}{4} < 1 + 1,$$

$$1 \leq \frac{x^2 - x + 2}{4} < 2,$$

$$4 \leq x^2 - x + 2 < 8,$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 \geq 4 \\ x^2 - x + 2 < 8 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \\ -2 < x < 3 \end{cases}$$

Используя метод интервалов, находим: $x \in (-2, -1] \cup [2{,}3)$

Ответ: $x \in (-2, -1] \cup [2{,}3)$

Задание 2.

Перейдем к равносильному тригонометрическому неравенству

$$1 \leq \sqrt{2}\sin x < 1 + 1,$$

$$1 \leq \sqrt{2}\sin x < 2,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x < \sqrt{2}$$

Т.к. по определению $|\sin x| \leq 1$, то получаем:

$$\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$

Задание 3.

Выполним равносильный переход к уравнению с целочисленным параметром

$$2^{x-1} = \frac{1}{2} + n,$$

$$\frac{2^x}{2} = \frac{1}{2} + n,$$

$$2^x = 1 + 2n, n \in Z_{\geq 0},$$

$$x = log_2(1 + 2n), n \in Z_{\geq 0}$$

Ответ: $x = log_2(1 + 2n), n \in Z_{\geq 0}$

Например, решение тренировочных заданий повышенного уровня:

Задание 1.

Домножим первое уравнение системы на 2, получим:

$$\begin{cases} 4[x] + 2[y] = 4 \\ [x] - 2[y] = 6 \end{cases}$$

После сложения двух уравнений получаем $5[x] = 10$. Отсюда $[x] = 2$. Подставим это значение во второе уравнение системы и получаем $[y] = -2$.

$[x] = 2$ и $[y] = -2$ - решения системы. То есть $x \in [2; 3), y \in [-2; -1)$.

Значит, $x = 2, y = -2$

Ответ: $(2; -2)$

Задание 2.

Система симметрична относительно x и y, тогда если (a, b) является решением системы, то и (b, a) также будет решением.

Пусть $x \geq y$

Если $[x] = 1$, то $[y] = 0$. Второе уравнение примет вид $x^2 + y^2 = 1$

В этом случае решением системы будет одна пара (1,0), а также симметричная ей пара (0,1).

Если $[x] = k$ $(k = 2,3, \dots)$, то $[y] < 0$. Из первого уравнения следует, что $x + y \geq 1$ и заведомо в данном случае $x - y > 1$. Поскольку второе уравнение примет вид $x^2 - y^2 = 1$, то других решений системы нет

Ответ: (0,1), (1,0)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам выполнения магистерской работы разработан электронный образовательный курс «Функции целой и дробной части действительного числа», элементами которого являются:

- теоретический материал по теме «Функции целой и дробной части действительного числа»;

- контрольные вопросы по теории с выбором ответа;

- набор тестов трёх уровней сложности.