МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Аппроксимации Паде

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Григорьева Андрея Владимировича

Научный руководитель
доцент к.ф.-м.н., доцент ________________ В. В. Кривобок

Зав. каф. к.ф.-м.н., доцент ________________ А. М. Водолазов

Саратов 2019

СОДЕРЖАНИЕ

1 Аппроксимация Паде

1.1 введение и основные понятия

Пусть задан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \tag{1.1}$$

представляющий функцию $f(z)$. Разложение (1.1) является исходным пунктом любого анализа, использующего аппроксимацию Паде. Всюду в дальнейшем через $c_i, i = 0, 1, 2, ...$, обозначаются коэффициенты ряда, а через $f(z)$-соответствующая функция. Аппроксимация Паде - это рациональная функция вида

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + ... + b_L z^L} \tag{1.2}$$

Разложение которой в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением (1.1) до тех пор, пока это возможно. Более полное и точное определение мы дадим в 1.4. Отметим, что функция вида (1.2) имеет $L+1$ коэффициентов в числителе и $M+1$ в знаменателе. Весь набор коэффициентов определяется с точностью до общего множителя, и для определенности положим $b_0 = 1$. Такой выбор станет затем существенной чертой точного определения, и условимся считать, что в записи (1.2) он подразумевается. Теперь имеем $L+1$ свободных параметров в числителе и M в знаменателе формулы (1.2); всего $L+M+1$ свободных параметров. Это означает, что в общем случае коэффициенты тейлоровского разложения функции $[L/M]$ при степенях $1, z, z^2, ..., z^{L+M}$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами ряда (1.1); другими словами, должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + ... + b_L z^L} + O(z^{L+M+1}) \tag{1.3}$$

Пример.

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + ...,$$

$$[1/0] = 1 - \frac{1}{2}z = f(z) + O(z^2),$$

$$[0/1] = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z}z = f(z) + O(z^2),$$

$$[1/1] = \frac{1+\frac{1}{6}z}{1+\frac{2}{3}z}z = f(z) + O(z^3),$$

Умножая (1.3) на знаменатель дроби, находим, что

$$(b_0 + b_1 z + ... + b_M z^M)(c_0 + c_1 z + ...) = \tag{1.4}$$

$$= a_0 + a_1 z + ... + a_L z^L + O(z^{L+M+1}). \tag{1.4}$$

Сравнивая коэффициенты при $z^{L+1}, z^{L+2}, ..., z^{L+M}$, получим равенства (1.5)

$b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + ... + b_0 c_{L+1} = 0,$

$b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + ... + b_0 c_{L+2} = 0,$

$b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + ... + b_0 c_{L+M} = 0,$

Для полноты положим $c_j = 0$ при $j < 0$. С учетом соглашения $b_0 = 1$ равенства (1.5) можно переписать в виде системы M линейных уравнений с M неизвестными коэффициентами знаменателя (1.6):

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_L \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+3} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}$$

Отсюда могут быть найдены коэффициенты b_j. Коэффициенты числителя $a_0, a_1, a_2, ..., a_L$ находятся теперь из (1.4) сравнением коэффициентов при $1, z, z^2, ..., z^L$ (1.7):

$a_0 = c_0,$

$a_1 = c_1 + b_1 c_0,$

$a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0,$

$\vdots$

$a_L = c_L + \sum_{i=1}^{min(L,M)} b_i c_{L-i}.$

Уравнения (1.6), (1.7) называются уравнениями Паде; в случае когда система (1.6) разрешима, они определяют коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде $[L/M]$. Коэффициенты тейлоровского разложения этой функции при $1, z, z^2, ..., z^{L+M}$ совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (1.1). Поскольку исходной точкой наших рассуждений являются коэффициенты ряда $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$, то нет необходимости заранее считать эти коэффициенты коэффициентами Тейлора какой-либо функции.

Теорема 1.1.1. Для многочленов, определенных равенствами (1.8) и (1.9), справедливо соотношение

$$Q^{[L/M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P^{[L/M]}(z) = O(z^{L+M+1}). \tag{1.10}$$

Теорема 1.1.2. Если $Q[L/M](0) \neq 0$, то аппроксимация Паде $[L/M]$ определяется равенством

$$[L/M] = \frac{P^{[L/M]}(z)}{Q^{[L/M]}(z)}, \tag{1.12}$$

Где $P^{[L/M]}(z)$, $Q^{[L/M]}(z)$ определены формулами (1.8), (1.9).

1.2 Аппроксимации Паде экспоненциальной функции.

Коэффициенты $c_i = \frac{1}{i!}$ тейлоровского разложения функции $exp(z)$ достаточно просты для того, чтобы числитель и знаменатель соответствующих аппроксимаций Паде можно было найти в явном виде. В этом пункте вычислим знаменатель $Q^{[L/M]}(z)$. Числитель находится затем с помощью простого и элегантного приема, основанного на тождестве $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Наша задача состоит в вычислении определителя

$$Q^{[L/M]}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} & \frac{1}{(L+2)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-1)!} & \frac{1}{(L+M)!} \\ z^M & z^{M-1} & \ldots & z & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Начинаем с вычисления постоянного слагаемого (коэффициента при 1 в правом нижнем углу).

1.3 Последовательности и ряды

Метод аппроксимаций Паде непосредственно применим для улучшения сходимости последовательностей и рядов. Пусть, например, известно, что некоторая последовательность аппроксимаций $[L_k/M_k](z)$, $k = 1, 2, ...$, сходится в точке $z = 1$. В этом смысле аппроксимации Паде можно использовать для суммирования ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}[L_k/M_k](1). \tag{1.22}$$

Аналогично, если дана последовательность $\{S_n, n = 0, 1, 2, ...\}$, определим соответствующий ряд, полагая

$$c_0 = S_0, \quad c_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \delta S_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad ,$$

И тогда аппроксимации Паде можно использовать для рассмотрения свойств последовательности. Обычно, если нет препятствующих причин, применяются диагональные аппроксимации Паде.

1.4 Приближение функций. Аппроксимационные полиномы

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется нахождение такой функции (аппроксимирующей функции) $g(x)$, которая была бы близка заданной. Критерии близости функций могут быть различные.

В случае, если приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют точечной или дискретной.

В случае, если аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), аппроксимация называется непрерывной или интегральной. Примером такой аппроксимации может служить разложение функции в ряд Тейлора, то есть замена некоторой функции степенным многочленом.

2 Связь непрерывных дробей с Аппроксимацией Паде

2.1 Определения и рекуррентные соотношения

Непрерывная дробь в общем случае имеет вид

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \tag{2.1}$$

Величины a_i и b_i, входящие в (1.1), называются элементами непрерывной дроби. Обычно это вещественные или комплексные числа. Дробь можно записать в более компактном виде:

$$b_0 + + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots, \tag{2.2}$$

имеющем тот же смысл, что и (2.1). Обрывная дробь, получим ее подходящие дроби, которые записываются в виде отношения $A_i/B_i, i = 0, 1, 2, \dots$
В частности, имеем

$$\frac{A_0}{B_0} = b_0, \frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}, \tag{2.3}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + a_2/b_2} = \frac{b_0 b_1 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}.$$

Теорема 2.1.1. Для непрерывной дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \dots \tag{2.9}$$

положим $A_0 = b_0, A_1 = b_1 b_0 + a_1$,

$$A_i = b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2} \text{ при } i = 2, 3, 4, \dots \tag{2.10}$$

и $B_0 = 1, B_1 = b_1$,

$$B_i = b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2} \text{ при } i = 2, 3, 4, \dots \tag{2.11}$$

Тогда отношение A_n/B_n равно (n+1)-й подходящей дроби (2.9).

2.2 Непрерывные дроби, связанные с рядом Тейлора

Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... \tag{2.14}$$

Произведем операцию обращения ряда:

$$1 + \frac{c_2 z}{c_1} + \frac{c_3 z^2}{c_1} + ... = (1 + c_1^{(1)} z + c_2^{(1)} z^2 + ...)^{-1}$$

отсюда получаем переразложение ряда (2.14)

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... = c_0 + \frac{c_1 z}{1 + c_1^{(1)} z + c_2^{(1)} z^2 + ...} \tag{2.15}$$

Теперь обратим ряд

$$1 + \frac{c_2^{(1)} z}{c_1^{(1)}} + \frac{c_3^{(1)} z}{c_1^{(1)}} + ... = (1 + c_1^{(2)} z + c_2^{(2)} z^2 + ...)^{-1}$$

откуда получаем другое переразложение:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... = c_0 + \frac{c_1 z}{\frac{c_1^{(1)} z}{1 + \frac{c_1^{(1)} z}{1 + c_1^{(2)} z + c_2^{(2)} z^2 + ...}}} \tag{2.16}$$

Теорема 2.2.1. Если c_1 и все коэффициенты $c_1^{(i)}$ отличны от нуля, то непрерывная дробь (2.17) имеет тейлоровское разложение (2.14). В этом случае аппроксимации Паде ряда (2.14) совпадают с подходящими дробями непрерывной дроби:

$$[M/M]_f(z) = \frac{A_{2M}(z)}{B_{2M}(z)} \text{ b } [M+1/M]_f(z) = \frac{A_{2M+1}(z)}{B_{2M+1}(z)} \tag{2.21}$$

при $M = 0, 1, 2, ...$

2.3 Алгебраические и численные методы

В этой главе сначала рассматривается одинпрактический метод разложения степенного ряда в непрерывную дробь. Затем обсуждаются некоторые методы численного нахождения величины непрерывной дроби.

Метод Висковатова- удобный практический метод построения непрерррывной дроби, или эквивалентной ей лестничной последовательности аппроксимации Паде, по заданному степенному ряду. Он позволяет избежать операции обращения рядов, которая применялась в (2.15) и (2.16). Этот экономичный метод полезен как в теории, так и в машинных вычислениях. Метод основан на формальном тождестве

$$\frac{\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r z^r}{\sum\limits_{r=0}^{\infty} b_r z^r} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{z}{\frac{\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r}{\sum_{r=0}^{\infty} (a_{r+1} - a_0 b_{r+1}/b_0) z^r}} \tag{2.30}$$

Рассмотрим теперь второй важный вопрос этой главы-численной нахождение величины дроби. Ни один из известных методов вычисление неприрывной дроби не признан наилучшим, поэтому приведем здесь три основных метода, не выделяя особо какой-либо из них. Итак, задача заключается в том, чтобы по заджанным элементам a_i, b_i и значению переменной z найти величину дроби z:

$$f(z) = \frac{a_1 z}{b_1} + \frac{a_2 z}{b_2} + \frac{a_3 z}{b_3} + ... \tag{2.32}$$

про которую известно, что она сходится.

2.4 Различные представления непрерывных дробей

В основном имеем дело с такими непрерывными дробями, у которых подходящие дроби являются аппроксимациями Паде степенного ряда. Для сохранения этой связи с аппроксимациями Паде ниже будут рассамтриваться непрерывные дроби, явным образом содержащие комплексную переменную z. Все формулы остаются справедливыми и при $z = 1$; это может быть полезно для общей теории непрерывных дробей.

Теорема 2.4.1. Для числителей $A_n(z)$ и знаменателей $B_n(z)$ подходящих дробей непрерывной дроби

$$f(z) = b_0 + \frac{a_1 z}{b_1} + \frac{a_2 z}{b_2} + \frac{a_3 z}{b_3} + ... \tag{2.43}$$

справедливы формулы

$$A_n(z) = \begin{pmatrix} b_o & -a_1 z & & & & \\ 1 & b_1 & -a_2 z & & & \\ & 1 & b_2 & -a_3 z & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & 1 & b_{n-2} & -a_{n-1} z & \\ & & & & b_{n-1} z & -a_n z \\ & & & 1 & 1 & b_n \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

$n = 0, 1, 2, ..., u$

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} b_1 & -a_2 z & & & & \\ 1 & b_2 & -a_3 z & & & \\ & 1 & b_3 & -a_4 z & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & 1 & b_{n-2} & -a_{n-1} z & \\ & & & & b_{n-1} z & -a_n z \\ & & & 1 & 1 & b_n \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

$n = 1, 2, 3, ...$

Теорема 2.4.3. Непрерывную дробь (2.43) можно представить в виде

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{1} - \frac{c_2 z}{c_1} - \frac{zC(2/2)/C(1/1)}{C(2/1)/C(1/1)} - \frac{zC(3/2)/C(2/1)}{C(2/2)/C(2/1)} - ... \tag{2.49}$$

Теорема 2.4.4. Формальное равенство между степенным рядом и непрерывной дробью

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 z}{b_2} + \frac{a_3 z}{b_3} + ... \tag{2.63}$$

имеет место, если

$$b_{2M+1} = \frac{C(M/M)}{C(M-1/M)}, \quad a_{2M+1} = -\frac{C(M/M+1)}{C(M-1/M)},$$

$$b_{2M+2} = \frac{C(M/M+1)}{C(M/M)}, \quad a_{2M+2} = \frac{C(M+1/M+1)}{C(M/M)}. \tag{2.64}$$

при $M = 1, 2, 3, ...$

Теорема 2.4.5. При $J \geq 0$ и $M = 1, 2, 3, ...$ элементы непрерывной дроби (2.71) удовлетворяют соотношениям

$$e_M^j q_{M+1}^j = e_{M-1}^{j+1} q_M^{j+1} \tag{2.73}$$

и

$$q_M^j + e_M^j = e_{M-1}^{j+1} + q_M^{j+1}, \tag{2.74}$$

где $M = 2, 3, 4, ...$ и $J \geq 0$.

2.5 Примеры непрерывных дробей,являющихся аппроксимациями Паде.

В этой главе приводятся некоторые примеры непрерывных дробей, которые являются аппроксимациями Паде. В таблице Паде такие J – дроби или S – дроби образуют диагональ, либо лестничную последовательность.

Экспоненциальная функция

$$expz = \frac{1}{1} - \frac{z}{1} + \frac{z}{2} - \frac{z}{3} + \frac{z}{2} - ... + \frac{z}{2} - \frac{z}{2n+1} + ... \tag{2.77a}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{z}{1} - \frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{2} + ... - \frac{z}{2} + \frac{z}{2n+1} - ... \tag{2.77b}$$

$$1 + \frac{z}{1-z/2} + \frac{z^2/(4*3)}{1} + \frac{z^2/(4*15)}{1} + \frac{z^2/(4*35)}{1} + ...$$
$$+ \frac{z^2/(4(4n^2-1))}{1} + ... \tag{2.77c}$$

Эти разложения сходятся при всех z.

3 Численная реализация аппрокимации Паде

В этой главе приведем алгоритм для нахождения аппроксимации Паде типа (n, m) функции $f(x)$ в точке $x = a$;
Находим кэффициенты $c_0, ..., c_{n+m}$ разложения в ряд Тейлора аппроксимируемой фунуции
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ в точке $x = a$.

Составим теплицевы матрицы (здесь $c_k = 0$, если $k < 0$)

$$T_k = \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} & \dots & c_M \\ c_{k+1} & c_k & \dots & c_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N-1} & \dots & c_{N+M-k} \end{pmatrix}, M \leq k \leq N,$$

где $M = n - m + 1$, $N = n + m$

Находим ранги r_k матриц $T_k, M \leq k \leq N$.

Находим размерности $d_k = k - M + 1 - r_k$, $M \leq k \leq N$ правых ядер матриц T_k. Положим так же $d_{M-1} = 0$, $d_{N+1} = N_M + 2$.

Составляем размерности $\Delta_k = d_k - d_{k-1}$, $M \leq k \leq N + 1$ и находим существенные индексы μ_1, μ_2.

Находим вектор $(g_0, g_1, ..., g_{\mu_1+1-M})^T$ из одномерного ядра матрицы T_{μ_1+1}. Он содержит коэффициенты знаменателя аппроксимации Паде, имеющего минимальную степен(первый существенный многочлен).

Находим знаменатель аппроксимации Паде $Q_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\mu_1+1-M} g_k(z-a)^k$.

Составляем матрицу $M = ||c_{i-j}||_{i=1,...,n+1;j=1,...,s+1}$ ($c_k = 0$, если $k < 0$), необходимую для нахождения числителя аппроксимации Паде.

Здесь s - степень многочлена $Q_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{s} q_k(z-a)^k$. После исключения почти нулевых коэффициентов в многослене $Q_1(z)$ его степень s может оказаться меньше формальной степени $\mu_1 + 1 - M$.

Находим вектор $(p_0, ..., p_n)^T = M * (q_0, ..., q_s)^T$ и числитель аппроксимации Паде $P_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(z-a)^k$. На этом этапе также целесообразно убрать нулевые элементы p_k перед образованием числителя.