МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Быстрое преобразование Фурье в локальных полях нулевой характеристики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Сазоновой Валерии Владиславовны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ________________ А.М.Водолазов
подпись, дата

Зав. кафедрой
доцент, к. ф.-м. н. ________________ А.М.Водолазов
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Преобразование Фурье – это семейство математических методов, основанных на разложении исходной непрерывной функции от времени на совокупность базисных гармонических функций (в качестве которых выступают синусоидальные функции) различной частоты, амплитуды и фазы. Основная идея преобразования заключается в том, что любую функцию можно представить в виде бесконечной суммы синусоид, каждая из которых будет характеризоваться своей амплитудой, частотой и начальной фазой.

Преобразование Фурье является основоположником спектрального анализа. Спектральный анализ – это способ обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. В зависимости от того, каким образом представлен сигнал, используют разные преобразования Фурье. Различают несколько видов преобразования Фурье:Непрерывное преобразование Фурье,Дискретное преобразование Фурье, Быстрое преобразование Фурье.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, Fast Fourier transform - FFT) представляет собой определенный алгоритм вычисления, который позволяет уменьшить количество производимых действий относительно прямого (по формуле) вычисления ДПФ. В основе алгоритма заложено разбиение заданной последовательности отсчетов дискретного сигнала на несколько промежуточных последовательностей. Следует отметить, что алгоритм БПФ точнее стандартного ДПФ, т.к. при сокращении операций снижаются суммарные ошибки округления.

В 1 главе вводим понятия поля p-адических чисел ,локального поля нулевой характеристики,характеры локальных полей.

Во 2 главе рассматриваем различные быстрые алгоритмы дискретных преобразований,среди которых быстрые преобразования:Хаара, Уолша, Фурье и быстрое преобразование Фурье-Виленкина

В 3 главе рассматриваем быстрые преобразования локальных полей нулевой характеристики.

В 4 главе рассматриваем методы преобразования Фурье.

Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, океанологии, оптике, геометрии, и многих других.

Основное содержание работы. Через $\mathbb{Z}$[1] обозначим кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$; через $\mathbb{Z}_+$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, ...\}$.

Пусть $\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел. Абсолютное значение $|x|$ любого $x \in \mathbb{Q}$ удовлетворяет следующим характерным свойствам:

1) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) $|xy| = |x||y|, y \in \mathbb{Q}$,

3) $|x + y| \leq |x| + |y|, y \in \mathbb{Q}$.

Любая функция со свойствами 1) - 3) называется нормой.

Пусть теперь p - простое число, p = 2,3,5,...,137,...
В поле $\mathbb{Q}$ введем другую норму $|x|_p$ по правилу

$$|0|_p = 0, |x|_p = p^{-\gamma(x)}, \tag{1.1}$$

где целое число $\gamma(x)$ определяется из представления

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n}, \qquad m,\ n,\ \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

и целые числа m и n не делятся на p. Норма $|x|_p$ называется p-адической нормой.

Норма $|x|_p$ обладает характерными свойствами 1) - 3) нормы даже в более сильной форме, а именно,

1) $|x| \geq 0$, причем $|x|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$,

3) $|x + y|_p \leq max(|x|_p, |y|_p)$.

В случае, когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство

3$'$) $|x + y|_p = max(|x|_p, |y|_p)$.

При p = 2 мы также имеем

3$''$) $|x + y|_2 \leq 1/2|x|_p$, если $|x|_2 = |y|_2$.

Пусть K [2] - локальное поле нулевой характеристики, являющееся конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Степень расширения равна $n = fe$. Поле K является линейным пространством размерности n над $\mathbb{Q}_p$. p-адическая норма продолжается с $\mathbb{Q}_p$ на K, т.е. $|x|_k = |x|_p$ для $x \in \mathbb{Q}_p$. Элементы из K $|x|_p \leq 1$ образуют кольцо V_k. Оно содержит единственный

[1] Дж.Касселс, А. Фрелих- Алгебраическая теория чисел//Москва:Изд. Мир, 1969.
[2] Р.Богнер, А. Константинидис- Введение в цифровую фильтрацию//Москва:Изд. Мир, 1976.

максимальный идеал $P_k = \{|x|_k < 1 \quad |x \in K\}$. Этот идеал - главный образующий элемент. Обозначим его за π.Он имеет наибольшую карту среди элементов P_k. Фактор кольцо V_k/P_k изоморфно конечному полю $GL(p^s)$. Это поле является линейным пространством над F_p степени s. Элементы базиса $GL(p^s)$ над F_p при изоморфизме пусть переходят в ε_0 , ... , ε_{s-1}.
ε_1, ... , ε_s являются единицами кольца $V_k(K_0)$. Образующий элемент идеала P_k можно выбрать таким образом, чтобы $\pi^e = p$. Тогда элементы
ε_0 , ... , ε_{s-1}, $\varepsilon_0\pi$, ... , $\varepsilon_{s-1}\pi$, ... , $\varepsilon_0\pi^{e-1}$, ... , $\varepsilon_{s-1}\pi^{e-1}$ образуют базис поля K над $\mathbb{Q}_p$.
Есть изоморфизм

$$K \simeq \varepsilon_0\mathbb{Q}_p \oplus ... \oplus \varepsilon_{s-1}\pi^{e-1}\mathbb{Q}_p$$

Для элемента $x \in K$ имеется разложение

$$x = \sum_{i=0,j=0}^{s-1,e-1} x_{ij}\varepsilon_i\pi^i, \quad x_{ij} \in \mathbb{Q}_p.$$

Представим элементы поля K как бесконечную последовательность.

$$x = (..., \alpha_{-n}, \alpha_{-n+1}, ..., \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, ...)$$

$\alpha_i \in 0, ..., p-1$
α_i - конечное число с отрицательными номерами $\neq 0$. Для примера рассмотрим случай, когда все $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = ... = \alpha_{-n} = 0$.

$x = (\alpha_0\varepsilon_0 + ... + \alpha_{s-1}\varepsilon_{s-1}) + (\alpha_s\varepsilon_0 + ... + \alpha_{s+s-1}\varepsilon_{s-1})\pi + ...+$
$... + (\alpha_{s_k}\varepsilon_0 + \alpha_{s_{k+1}}\varepsilon_1 + ... + \alpha_{s_{k+s-1}}\varepsilon_{s-1})\pi^k + ... :$

$$\alpha_{s_{i+j}} \in \{0, ..., p-1\}$$

Т.к. $\pi^e = p \qquad |\pi^e|_k = |p|_k = |p|_{Q_p} = \frac{1}{p}$
$|\pi|_k = \frac{1}{p^e}$

$|x|_k = |\pi^t|_k = \frac{1}{p^{te}}$, где t наименьший номер, для которого, среди чисел $\alpha_{st}, ..., \alpha_{st+s-1}$, существует ненулевое разложение.

Операция сложения на двух последовательностях определяется покомпонентно.
Если $x = (\alpha_i)$, $y = (\beta_i)$, то

$$x + y = (\alpha_i + \beta_i)$$

Если $\alpha_i + \beta_i \geq p$, то перенос 1 осуществляется в $i + n$ разряд.
(Для нульмерных групп с последовательностью образующих g_i выполнено соотношение $pg_i = g_{i+n}$).
Умножение $x \cdot a$, где $a \in \{0, 1, ..., p - 1\}$, это $x \cdot a = x + ... + x$ (a - раз)
$x \cdot \pi$, $x = (\alpha_i)$
$x \cdot \pi \ \alpha_i \longrightarrow \alpha_{i+s}$
Сдвигаем на s разрядов вправо.

$x \cdot \varepsilon_i$ на элементах $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{s-1}$ определены правила умножения из изоморфизма с полем $GL(p^s)$, используя этот изоморфизм, элемент $(\alpha_0\varepsilon_0 + ... + \alpha_{s-1}\varepsilon_{s-1})\varepsilon_i$ преобразуем в некоторый элемент

$$\alpha_0^{'}\varepsilon_0 + \alpha_1^{'}\varepsilon_1 + ... + \alpha_{s-1}^{'}\varepsilon_{s-1}.$$

Шары и мера в поле K определяются стандартно через норму поля K.

Рассмотрим быстрое преобразование Хаара. Пусть

$$\chi_0(t) \equiv 1, \chi_{2^N+j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{N}{2}}, \quad t \in \left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+\frac{1}{2}}{2^N}\right) \\ -2^{\frac{N}{2}}, \quad t \in \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right) \\ 0, \quad t \notin \left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right) \end{cases}$$

функции Хаара на [0,1] $(N = 0, 1, ..., ; j = 0, 1, ..., 2^N - 1)$.
Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и представим [0,1) в виде объединения двоичных полуинтервалов

$$[0, 1) = \bigsqcup_{j=0}^{2^N-1} \Delta_j^{(N)} \quad (\Delta_j^{(N)} = [j2^{-N}, (j + 1)2^{-N}).$$

Любая двоично ступенчатая функция $f^{(N)}(t)$, постоянная на $\Delta_j^{(N)}$, есть полином по системе Хаара

$$f^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\chi_j(t). \tag{2.3}$$

Вектор $(\hat{f}(j))_{j=0}^{2^N-1}$ называют дискретным преобразованием Фурье - Хаара функции $f^{(N)}$. Для краткости будем обозначать $f_j^{(N)} = f(\Delta_j^{(N)})$, т.е. функцию f можно рассматривать как вектор $(f_j^{(N)})_{j=0}^{2^N-1}$.

Получим быстрый алгоритм нахождения $\hat{f}$. Запишем равенство (2.3) в виде

$$f^{(N)}(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) + \sum_{n=2^N-1}^{2^N-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) +$$

$$r_{N-1}(t) \sum_{j=0}^{2^{N-1}} \hat{f}(2^{N-1}+j)h_j^{(N-1)}(t) = f^{(N-1)}(t) + r_{N-1}(t)g^{(N-1)}(t), \qquad (2.4)$$

где $h^{(N-1)}(t) = \chi_{\Delta_j}^{(N-1)}(t)$, $f^{(N-1)}(t)$ - двоично- ступенчатая функция, постоянная на $\Delta^{(N-1)}$, $g^{(N-1)}(t)$ - двоично ступенчатая, значения которой на $\Delta_j^{(N-1)}$ равно $\hat{f}(2^{N-1}+j)$. Записывая равенство (2.4) на полуинтервале

$$\Delta_j^{(N-1)} = \Delta_{2j}^{(N)} \sqcup \Delta_{2j+1}^{(N)},$$

имеем систему

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} f_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} + f_{2j+1}^{(N)}) \\ g_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)}) \quad (j = 0, 1, ..., 2^{N-1} - 1) \end{cases} \qquad (2.5)$$

Таким образом, мы нашли значения $f_j^{(N-1)}$ функции $f^{(N-1)}$ и значения $g_j^{(N-1)}$ функции $g^{(N-1)}$, причем $g_j^{(N-1)} = \hat{f}(2^{(N-1)}+j)$, т.е. мы нашли компоненты $\hat{f}$ с номерами $\geq 2^{(N-1)}$. Сделанный шаг удобно записать в следующем виде.

Пусть

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, ..., \lambda_{2^N-1})$$

вектор значений функции $f^{(N)}$. Равенства (2.5) для вектора (λ_n) запишем в виде

$$\begin{cases} \lambda_j := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) \qquad (j = 0, 1, ..., 2^{N-1} - 1) \\ \lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}) \qquad (j = 0, 1, ..., 2^{N-1}) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Таким образом, проведя преобразования (2.6), мы получим новый вектор $(\lambda_n)_{n=0}^{2^N-1}$, в котором последние компоненты $\lambda_{2^{N-1}+j} = \hat{f}(2^{N-1}+j)$, а первые компоненты $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}-1}$, есть значения функции

$$f^{(N-1)} = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t)$$

кусочно постоянной на полуинтервалах ранга $N-1$, причем коэффициенты Фурье - Хаара функции $f^{(N-1)}$ есть первые 2^{N-1} коэффициентов исходной функции $f^{(N)}$. Применяя к функции $f^{(N-1)}$, т.е. к вектору

$$(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^{N-1}-1})$$

преобразования (2.6), получим вектор

$$(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^{N-2}-1}, \lambda_{2^{N-2}}, ..., \lambda_{2^{N-1}-1}),$$

в котором последние 2^{N-2} компонент есть компоненты вектора $\hat{f}$.

Продолжая последовательное применение формул (2.6), получаем после N - го шага последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^N-1})$, которая совпадает с $\hat{f}$. Нетрудно посчитать, что число операций равно

$$2 \cdot 2^N + 2 \cdot 2^{N-1} + ... + 2 \cdot 2^1 \approx 2^{N+2}.$$

Рассмотрим быстрое преобразование Фурье - Уолша. Задача ставится аналогично дискретному преобразованию Хаара.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ - двоично-постоянна на [0,1) и $f_j = f^{(N)}(\Delta_j^{(N)})$. Пусть $\omega_j(x)$ - функции Уолша на [0,1). Тогда

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\omega_j(x). \tag{2.7}$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(j)$. Записываем (2.7) в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\omega_j(x) + r_{N-1}(x) \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(2^{N-1}+j)\omega_j(x) =$$

$$= f^{(N-1)} + r_{N-1}(x)g^{(N-1)}(x), \qquad (2.8)$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ двоично-ступенчатые на интервалах ранга $N\ -1$. Записывая (2.8) в точках полуинтервала $\Delta_j^{(N-1)} = \Delta_{2g}^{(N)} \sqcup \Delta_{2g+1}^{(N)}$, снова получаем равенства

$$\begin{cases} f_{(2j)}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{(2j+1)}^{(N)} = f_j^{(N-1)} - g_j^{(N-1)} \end{cases}$$

из которых находим

$$\begin{cases} f_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} + f_{2j+1}^{(N)}) \\ g_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)}) \end{cases}$$

Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через $\lambda_j (j = 0, ..., 2^N - 1)$, то дискретное преобразование для вектора

$$(\lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, ..., \lambda_{2^{N-1}})$$

задается формулами

$$\lambda_j := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1})$$

$$\lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}).$$

Это те же преобразования Хаара, и после их применения получаем вектор,

$$(\lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, ..., \lambda_{2^{N-1}})$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент - значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $\lambda_{2^{N-1}}, ..., \lambda_{2^{N-1}}$ не будут коэффициентами Фурье-Уолша функции $g^{(N-1)}$), и поэтому нужно применять преобразование и к левой половине вектора (λ_n), и к первой половине. Повторяя эту процедуру N раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье-Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций

$$2^{N+1} + 2^{N+1} + ... + 2^{N+1} = N2^{N+1}.$$

Рассмотрим быстрые дискретные преобразования Фурье. Пусть $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ фиксировано. Определяем функции

$$e_n(x) = e^{2\pi in\frac{j}{2^N}}, x \in \Delta_j^{(N)}, j = \overline{0, 2^N - -1}, n = \overline{0, 2^N - 1}. \tag{2.10}$$

Они образуют ортонормированную систему на [0,1), состоящую из двоично-ступенчатых функций.

Можно определить функции $e_n(x)$ на дискретном множестве $E = 0, 1, 2, ..., 2^N - 1$, но в этом случае равенства (2.10) принимают вид

$$e_n(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi in\frac{j}{2^N}}. \tag{2.11}$$

Любая функция, определенная на E, с комплексными значениями $\lambda_j^{(N)} = f(j)$ есть полином

$$f(j) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j). \tag{2.12}$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(n)$. Записываем (2.12) в виде

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n) e_{2n}(j) + \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n+1) e_{2n+1}(j).$$

Если $j = 2^{N-1} + \nu(\nu = 0, 1, ..., 2^{N-1} - 1)$, то

$$e_{2n}(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i \cdot 2n \cdot \frac{j}{2^N}} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi in\frac{2^{N-1}+\nu}{2^{N-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi in\frac{\nu}{2^{N-1}}} = e_n(\nu),$$

$$e_{2n+1}(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i\frac{j}{2^N}} \cdot e^{2\pi in\frac{\nu}{2^{N-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_n(\nu).$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n) \frac{e_n(jmod2^{N-1})}{\sqrt{2}}$$

$$+ \quad e^{\frac{2\pi ij}{2^N}} \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n+1) \frac{e_n(jmod2^{N-1})}{\sqrt{2}}. \tag{2.13}$$

Обозначим
$$\sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n)e_n(jmod2^{N-1}) = \lambda_j^{(N-1)},$$
$$\sum_{n=0}^{2^{N-1}} \hat{f}(2n+1)e_n(jmod2^{N-1}) = \mu_j^{(N-1)}.$$
Тогда при $0 \leq j \leq 2^{N-1}-1$ равенства (2.13) примут вид
$$\lambda_j^{(N)} = \frac{\lambda_j^{(N-1)}}{\sqrt{2}} + e^{\frac{2\pi ij}{2^N}} \frac{\mu_j^{(N-1)}}{\sqrt{2}},$$
а при $2^{N-1} \leq j \leq 2^N - 1$, т.е. при $j = 2^{N-1} + \nu$
$$\lambda_{2^{N-1}+\nu}^{(N)} = \frac{\lambda_{/nu}^{(N-1)}}{\sqrt{2}} - e^{\frac{2\pi i\nu}{2^N}} \cdot \frac{\mu_\nu^{(N-1)}}{\sqrt{2}}.$$
Из этих равенств находим
$$\begin{cases} \lambda_j^{(N-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j^{(N)} + \lambda_{j+2^{N-1}}^{(N)}) \\ \mu_j^{(N-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j^{(N)} - \lambda_{j+2^{N-1}}^{(N)})e^{-\frac{2\pi ij}{2^N}} \end{cases} \tag{2.14}$$
при $j = 0, 1, 2, ..., 2^{N-1} - 1$.

Если числа $\lambda_j^{(N-1)}$ расположить в исходной строке на местах $j = 0, 1, 2, ..., 2^{N-1} - 1$, а числа $\mu_j^{(N-1)}$ - на местах $2^{N-1}, 2^{N-1} + 1, ..., 2^{N-1}$, то получим преобразование исходной строки (λ_j) по формулам
$$\begin{cases} \lambda_j := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}}) \\ \lambda_{j+2^{N-1}} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j - \lambda_{j+2^{N-1}})e^{-\frac{2\pi ij}{2^N}} \end{cases}$$
После применения последнего преобразования в строке $(\lambda_j)_{j=0}^{2^N-1}$ начало строки $\lambda_0, ..., \lambda_{2^{N-1}-1}$ определяет функцию, коэффициенты Фурье которой есть $\hat{f}(2j)(j = 0, 1, ..., 2^{N-1} - 1)$, а конец строки $\lambda_{2^{N-1}}, ..., \lambda_{2^{N-1}}$ определяет функцию, коэффициенты Фурье которой есть $\hat{f}(2j + 1)$. Применяя последнее преобразование N раз, получаем переставленную последовательность коэффициентов Фурье. Если мы хотим получить её в естественном порядке, то нужно λ_j располагать на местах $2j$, а числа λ_{2j+1} - на местах $2j + 1$. Т.е. последние

формулы можно записать в виде

$$\lambda_{2j} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}})$$

$$\lambda_{2j+1} := \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2\pi ij}{2^N}}(\lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}}).$$

Заключение.В работе ввели понятие поля p - адических чисел. Рассмотрели представление локального поля,характеры поля K.Были рассмотрены основные быстрые алгоритмы,среди которых: Быстрое преобразование Хаара, Быстрое преобразование Уолша, Быстрое преобразование Фурье, Быстрое преобразование Фурье-Виленкина, Быстрое диадическое преобразование.