

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Аппроксимация функциями Фабера-Шаудера

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

механико-математического факультета

Булавина Юрия Владимировича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

подпись, дата

Ю.С.Крусс

Зав. кафедрой
зав. каф. к.ф.-м.н, доцент

подпись, дата

А.М.Водолазов

Саратов 2019

Введение. Задача аппроксимации математических функций и сигналов занимают важное место в решении практических задач в таких областях как математическое моделирование, обработка сигналов. Одной из задач аппроксимации является построение приближения для функции заданной аналитически с помощью некоторых других функций. Одной из систем используемых для приближения функций является система Фабера-Шаудера.

Аппроксимацией называется получение некой функции, приближенно описывающей какую-то функциональную зависимость $f(x)$, заданную таблицей значений, либо заданную в виде, неудобном для вычислений.

В зависимости от способа подбора параметров получают различные методы аппроксимации, среди которых наибольшее распространение получили интерполяция и среднеквадратичное приближение. Наиболее простой является линейная аппроксимация, при которой выбирают функцию линейно зависящую от параметров, т. е. в виде обобщенного многочлена:

$$f_i(x, c) = \sum C_k f_{i_k}(x).$$

Система Фабера-Шаудера была определена в начале 20 века, сначала Г. Фабером в 1910 году, а затем переоткрыта Ю. Шаудером в 1927. Данная система является простейшим базисом пространства непрерывных функций на отрезке $C[0,1]$.

Для построения приближения исходной непрерывной функции из $C[0,1]$ разбиваем отрезок на 2^n отрезков длины $\frac{1}{2^n}$ и берем значения исходной функции в концах полученных отрезков. Увеличивая количество отрезков получаем более точное приближение заданной функции.

Целью этой работы является изучение системы функций Фабера-Шаудера и написание алгоритма для аппроксимации некоторых элементарных функций на отрезке $[0,1]$.

Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Первая глава - основные и вспомогательные теоремы об ортонормированных базисах, которая содержит вспомогательные обозначения, термины и понятия, необходимые для раскрытия темы бакалаврской работы. Вторая глава система Фабера-Шаудера, посвящена системе функций Фабера-Шаудера основным определениям и теоремам, необходимых для реализации программы. Третья глава - Постановка и решение задачи.

Основное содержание работы. В первой главе выпускной работы вводятся такие понятия как базис, ортонормированный базис и некоторые вспомогательные теоремы

Пусть $\mathcal{V}$ -векторное пространство с основным множеством V . Если существует в V такое конечное множество $\{a_1, \dots, a_m\}$ векторов, что $V = L(a_1, \dots, a_m)$, то говорят, что пространство $\mathcal{V}$ порождается конечным множеством $\{a_1, \dots, a_m\}$, и это множество называется системой образующих пространства $\mathcal{V}$.

Определение 1.1. Векторное пространство называется конечномерным, если оно порождается конечным множеством векторов.

Определение 1.2. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пространства $\mathcal{V}$ называется линейно зависимой, если существуют скаляры $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пространства $\mathcal{V}$ называется линейно независимой, если для любых скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ из равенства $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ следует что все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Свойство 1.1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Свойство 1.2. Система векторов линейно зависима, если какая-нибудь ее подсистема линейно зависима.

Следствие 1.1. Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.

Свойство 1.3. Система векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$, в которой $u_1 \neq 0$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов $u_2, \dots, u_m$ является линейной комбинацией предшествующих векторов.

Свойство 1.4. Если система векторов $u_1, \dots, u_m$ линейно независима, а система векторов

$$u_1, \dots, u_m, v$$

линейно зависима, то вектор v линейно выражается через векторы $u_1, \dots, u_m$, и притом единственным образом.

Определение 1.3. Множество $\{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F\}$ всех линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_n$ с коэффициентами из F называется линейной оболочкой векторов $a_1, \dots, a_n$ и обозначается через $L(a_1, \dots, a_n)$.

Свойство 1.5. Если $u \in L(v_1, \dots, v_m)$ и $v_1, \dots, v_m \in L(\omega_1, \dots, \omega_s)$, то $u \in L(\omega_1, \dots, \omega_s)$.

Определение 1.4. Базисом конечномерного векторного пространства называется непустая конечная линейно независимая система векторов, порождающая это пространство.

Теорема 1.1. Любой вектор n -мерного векторного пространства единственным образом раскладывается по базису.

Определение 1.5. Векторы a, b из V называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 1.6. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ пространства $\mathcal{V}$ называется ортогональной, если ортогональны любые два вектора системы. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, считается ортогональной.

Определение 1.7. Нормой вектора a евклидова пространства называется арифметический квадратный корень из скалярного квадрата векторов и обозначается через $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$.

Определение 1.8. Вектор a называется нормированным, если $\|a\| = 1$.

Определение 1.9. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ евклидова пространства называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый ее вектор нормирован. Ортогональный (ортонормированный) набор векторов, который является базисом, называется ортогональным (соответственно ортонормированным) базисом.

Определение 1.10. Совокупность всех векторов, ортогональных к линейному подпространству L_1 евклидова пространства L называется ортогональным дополнением подпространства L_1 и обозначается $L_1^\perp$.

Теорема 1.2. Любое ненулевое конечномерное векторное пространство обладает базисом. При этом если система векторов

$$a_1, \dots, a_m \tag{1.2}$$

пораждает векторное пространство $\mathcal{V}$, то базис системы векторов (1.2) является базисом пространства $\mathcal{V}$.

Определение 1.11. Скалярное умножение в пространстве $\mathcal{V}$ называется невырожденным, если $a \cdot a \neq 0$ для любого ненулевого вектора a из V . Скалярное умножение в пространстве $\mathcal{V}$ называется нулевым, если $a \cdot b = 0$ для любых a, b из V .

Теорема 1.3. Пусть $\mathcal{V}$ — конечномерное векторное пространство невырожденным скалярным умножением. Ортогональную систему ненулевых векторов, не являющуюся базисом пространства, можно дополнить до ортогонального базиса пространства.

Следствие 1.2. Любое конечномерное ненулевое векторное пространство с невырожденным скалярным умножением обладает ортогональным базисом.

Теорема 1.4. Конечномерное ненулевое евклидово векторное пространство обладает ортонормированным базисом.

Свойство 1.6. Если $\mathcal{V}$ — n -мерное ненулевое евклидово пространство, то любая ортонормированная система n векторов является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{V}$.

Свойство 1.7. Ортонормированную систему векторов ненулевого конечномерного евклидова пространства, не являющуюся базисом, можно дополнить до ортонормированного базиса пространства.

Свойство 1.8. Если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства и

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$$

— векторы пространства, то

$$ab = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n \quad \text{и} \quad \|a\|^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2.$$

Свойство 1.9. Если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства и $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, то $\alpha_i = a e_i$ для $i = 1, \dots, n$, т.е. координаты a являются его проекцией на базисные векторы.

Свойство 1.10. Если $\mathcal{L}$ подпространство конечномерного евклидова пространства $\mathcal{V}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$ и $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}^\perp$.

Определение 1.12. Нормированное пространство $C[a, b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Норма определяется как

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|$$

сходимость по норме пространства $C[a, b]$ — равномерная сходимость. Пространство $C[a, b]$ — банахово (полное).

Определение 1.13. Система элементов $\{x_\alpha\} \subset X$ — называется полной в X , если замыкание линейной оболочки системы $\{x_\alpha\}$ совпадает с X .

Определение 1.14. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется минимальной в X , если $x_k \notin X_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$

Определение 1.15. Банахово пространство — нормированное векторное пространство, полное по метрике, порождённой нормой. В дальнейшем будем обозначать X , а его сопряженное пространство будем обозначать X^* .

Определение 1.16. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства X называется базисом, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}^1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

сходящийся к x по норме X .

Теорема 1.5. Для того чтобы система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ была базисом в банаховом пространстве X , необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- а) $\{x_n\}$ полна в X ;
- б) $\{x_n\}$ минимальна;
- в) существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого $x \in X$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leq M \|x\|, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

где $\{y_n\}$ — система, сопряженная к $\{x_n\}$

Следствие 1.3. Если $\{x_n\}$ — базис в X , то функционалы $a_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, являются линейными ограниченными функционалами и определяются равенствами

$$a_n(x) = \langle x, y_n \rangle, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{y_n\}$ — система, сопряженная к $\{x_n\}$.

Теорема 1.6. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в банаховом пространстве X , $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная к $\{x_n\}$ система. Тогда $\{y_n\}$ — базис в пространстве Y — замыкании своей линейной оболочки (с нормой сопряженного к X пространства X^*).

Следствие 1.4. Если система функций $\{\varphi_n(x)\}$ — базис в $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, то сопряженная к ней система $\{\psi_n(x)\}$ является базисом в $L^q(0, 1)$ с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Следствие 1.5. Если ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ является базисом в $L^p(0, 1)$ и при этом

$$\varphi_n \in L^p(0, 1) \cap L^q(0, 1), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty, \quad (1.10)$$

то Φ — базис в $L^{p'}(0, 1)$ для любого $p' \in \Delta = [\min(p, q), \max(p, q)]$.

Теорема 1.7. Если ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в $C(0, 1)$, то Φ является базисом также и в $L_p(0, 1)$ при $1 \leq p < \infty$.

Определение 1.17. Базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется безусловным, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ система $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ также является базисом в X .

Теорема 1.8. Для того чтобы полная и минимальная в X система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная M , для которой при любом наборе чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^N$ с $\varepsilon_n = \pm 1$ для $1 \leq n \leq N$, $N = 1, 2, \dots$, выполняются неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leq M \|x\|. \quad (1.11)$$

Следствие 1.6. Для того чтобы полная и минимальная в X система $\{x_n\}$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, были определены операторы $T_\varepsilon(x)$ и нормы этих операторов были ограничены постоянной, не зависящей от ε . При этом,

$$B\|x\| \leq \|T_\varepsilon(x)\| \leq A\|x\|, \quad x \in X,$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от x и ε .

Во второй главе рассматривается система функций Фабера-Шаудера основные определения и теоремы.

Определение 2.1. Системой Фабера-Шаудера называется система функций

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0, 1],$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad x \in [0, 1],$$

и при этом $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$.

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна} \\ \text{на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] & \text{и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}}\right] \end{cases} \quad (2.1)$$

Систему Фабера-Шаудера можно определить также, интегрируя функции Хаара. Точнее говоря, имеют место равенства

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \chi_1(t)dt, \quad \varphi_n(x) = 2\|\chi_n\|_{\infty} \int_0^x \chi_n(t)dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

Рассмотрим ряд по Системе Фабера-Шаудера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i} \varphi_k^{(i)}(x) \quad (2.3)$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к конечной функции $f(x)$. Коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, а

именно, что

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0(f) = f(0), \quad A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0), \\ A_n &= A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$.

Из определения функций φ_n , $n = 0, 1, \dots, N$, и их линейной независимости вытекает следующее утверждение:

(А) При $N = 1, 2, \dots$ пространство $G_N = G_N(\Phi)$ полиномов по системе Фабера-Шаудера вида $P_N(x) = \sum_{n=0}^N A_n \varphi_n(x)$ имеет размерность $N + 1$ и совпадает с пространством L_N , определяемым так:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{f \in C(0, 1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in (0, 1)\}, \\ L_N &= \{f \in C(0, 1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in \left(\bigcup_{s=1}^{2i} \Delta_{k+1}^s\right) \cup \left(\bigcup_{s=i+1}^{2^k} \Delta_k^s\right)\} \\ &\quad (N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим также такое свойство системы Фабера-Шаудера:

(В) Для производной функции $f(x)$ и $N = 1, 2, \dots$ сумма

$$S_N(f, x) = \sum_{n=0}^N A_n(f) \varphi_n(x),$$

в которой коэффициенты определяются равенствами (2.4), совпадает с $f(x)$ на множестве π_N :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{0, 1\}, \quad \pi_N = \left\{\frac{s}{2^k}\right\}_{s=0}^{2^k} \cup \left\{\frac{2s-1}{2^{k+1}}\right\}_{s=1}^i \\ &\quad (N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теорема 2.1. Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве $C(0, 1)$. При этом коэффициенты разложения

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(x), \quad f \in C(0, 1),$$

определяются формулами (2.4), а частные суммы $S_N(f, x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению

$$S_N(f, x) = f(x) \text{ при } x \in \pi_N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Следствие 2.1. Пусть $f \in C(0, 1)$. Имеют место оценки

а) $|A_n(f)| \leq \omega^2(\frac{1}{N}, f), \quad n = 1, 2, \dots, \text{ где}$

$$\omega^2(\delta, f) := \sup_{\substack{0 < h \leq \delta, \\ h \leq x \leq 1-h}} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|;$$

б) $\|f - S_N(f)\|_C \leq \omega^2(\frac{1}{N}, f)$

Теорема 2.2. В пространстве $C(0, 1)$ не существует безусловного базиса.

Определение 2.2. Липшица условие — ограничение на поведение приращения функций. Если для любых точек x и x' , принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha,$$

где $0 < \alpha \leq 1$ и M — некоторая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на отрезке $[a, b]$, и пишут $f(x) \in Lip \alpha$.

Теорема 2.3. Пусть $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы ряд (2.3) являлся разложением функции $f \in Lip \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$|A_n| \leq Cn^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, 17 \quad (2)$$

Замечание 2.1. Легко видеть, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \varphi_k^{(1)}(x) \notin Lip 1,$$

хотя, очевидно, $|A_n(f)| \leq n^{-1}$. Таким образом, утверждение теоремы 2.3 теряет силу при $\alpha = 1$.

Утверждение 2.1. Пусть $f \in C(0, 1)$, $f(0) = f(1) = 0$ и $0 = k_0 < k_1 < \dots$ — последовательность целых чисел.

Существуют целые числа i_s , $1 \leq i_s \leq 2^{k_s}$, $s = 0, 1, \dots$, и непрерывная на $[0, 1]$ функция $\tau(x)$ с условием

$$0 = \tau(0) < \tau(x) < \tau(y) < \tau(1) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < y < 1 \quad (2.19)$$

такие, что разложение суперпозиции $F(x) := f \circ \tau(x)$ по системе Фабера-Шаудера имеет вид:

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{k_s, i_s} \varphi_{k_s}^{(i_s)}(x). \quad (2.20)$$

Следствие 2.2. Для произвольной функции $f \in C(0, 1)$ и $f(0) = f(1)$ найдется такая функция $\tau(x)$ вида (??), что интегральный модуль непрерывности второго порядка суперпозиции $F(x) = f \circ \tau(x)$ удовлетворяют условию

$$\omega_1^{(2)}(\delta, F) = o(\delta) \quad \text{при} \quad \delta \longrightarrow +0. \quad (2.24)$$

Третья глава посвящена построению алгоритма аппроксимации функциями Фабера-Шаудера некоторых непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

Алгоритм реализован в виде программы, написанной на языке программирования Java.

В результате работы данной программы, на экран выводится результат приближения заданной функции в виде графика. Далее приведем пример на основе функции $f(x) = x^2$. Черным цветом обозначим саму ветвь параболы, а красным — приближение функциями Фабера-Шаудера.

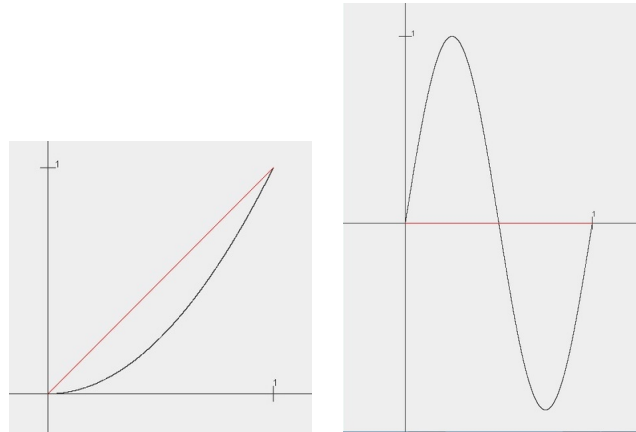


Рисунок 1 — Аппроксимация функциями Фабера-Шаудера при $N=0$

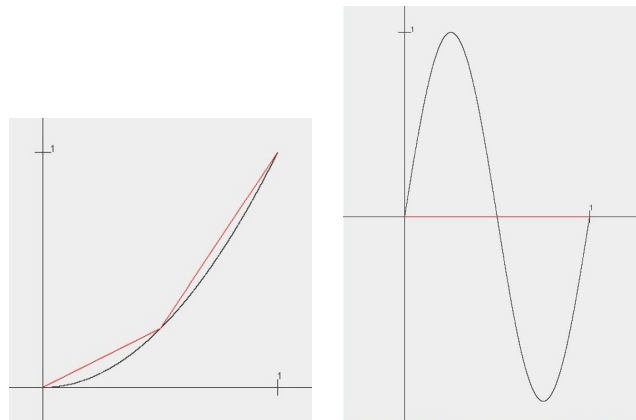


Рисунок 2 — Аппроксимация функциями Фабера-Шаудера при $N=1$

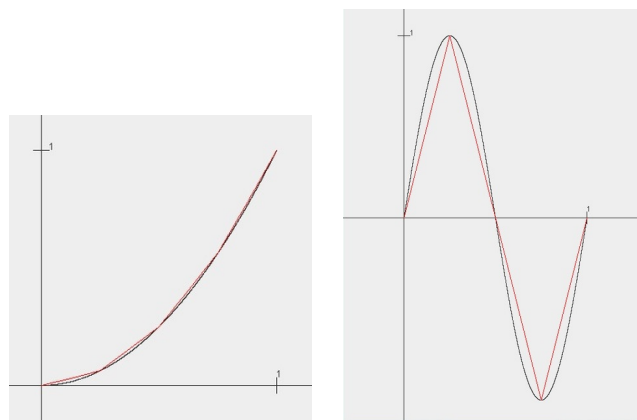


Рисунок 3 — Аппроксимация функциями Фабера-Шаудера при $N=2$

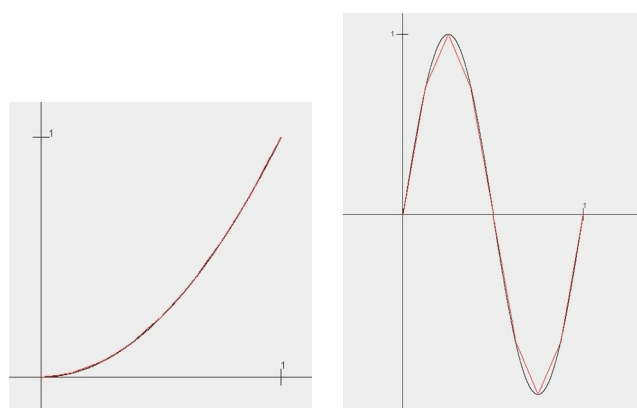


Рисунок 4 — Аппроксимация функциями Фабера-Шаудера при $N=3$

Заключение. В работе были даны основные и вспомогательные определения и теоремы, касающиеся системы Фабера-Шаудера. Описан алгоритм приближения функциями Фабера-Шаудера. Для реализации этого была написана программа на языке Java. В результате которой мы рассмотрели два графика функций $f = x^2$ и $f = \sin 2\pi x$ и их приближения.