

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Математическое моделирование течения**

**жидкости в канале с уступом**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Цыплина Константина Витальевича

Научный руководитель  
доцент, к.т.н.

И.А. Панкратов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2019

**Введение.** Применение вычислительных методов в естественных науках в последнее время получило широкое распространение. «Численный» уклон в процессе теоретического исследования различных классов задач не только не снизил качества подобных исследований, но и придал им жизненный колорит, приблизив их к требованиям практики.

Динамика жидкости и газа представляет собой одну из тех областей знания, где подходы, основанные на применении численных методов, оказались особенно плодотворными и позволили получить продвижение в решении ряда проблем, считавшихся до этого неразрешимыми. Действительно, такие особенности уравнений гидроаэродинамики, как нелинейность, высокий порядок (особенно в отношении пространственных задач) и возможность появления разрывных решений делают численный метод исследования наиболее предпочтительным и эффективным. Как раз это обстоятельство и привело к созданию «вычислительной гидроаэродинамики», обозначающей по существу некую самостоятельную и бурно развивающуюся область науки.

В данной бакалаврской работе проведено изучение течения жидкости в канале с уступом.

В первом разделе рассмотрены уравнения движения вязкой жидкости. Кратко описан вывод уравнений Эйлера и Навье-Стокса, а также уравнения неразрывности.

Во втором разделе приведено описание различных численных методов, используемых при решении задач гидромеханики. Построение численного решения традиционно разделяется на два этапа: приведение дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений и решение этих уравнений. В настоящей работе сделан выбор в пользу метода конечных объёмов.

В третьем разделе описан пакет прикладных программ OpenFOAM, использованный для расчёта параметров течения в канале с уступом. Приведена структура этого пакета, указана схема, по которой нужно проводить расчёты.

В четвёртом разделе дана постановка задачи о течении жидкости в канале с уступом. Приведена математическая модель такого течения вязкой жидкости.

В последнем разделе приведены примеры численного решения задачи. Рассмотрен как стационарный случай, так и нестационарный. Построены графики изменения скорости и давления. Приведен анализ полученных решений.

**Уравнения движения вязкой жидкости.** Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости можно получить с помощью уравнения равновесия жидкости в дифференциальной форме, выведенные Л.Эйлером, имеют вид [1]:

$$\rho a_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho a_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho a_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Добавим в эти уравнения силы инерции, отнесенные к массе движущейся жидкости. Скорость жидкости является функцией координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ ; ее ускорение состоит из трех компонентов, являющихся производными проекций на координатные оси:

$$\begin{aligned} \rho a_x - \rho \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho a_y - \rho \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho a_z - \rho \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера.

Переход к реальной жидкости в этом уравнении требует учета сил трения, отнесенных к единице массы жидкости.

Выражение для нормальных и касательных напряжений в вязкой жидкости можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Если подставить эти выражения в уравнение Эйлера то получим

$$\begin{aligned} \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \mathbf{u}) = \rho \frac{du_x}{dt}. \end{aligned}$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье-Стокса; их используют для описания движений вязких сжимаемых жидкостей и газов.

Уравнения движения невязких жидкостей и газов легко получить из уравнений Навье-Стокса как частный случай при  $\mu = 0$ ; для несжимаемых жидкостей следует принять  $\rho = \text{const}$ .

Система уравнений Навье-Стокса незамкнута, так как содержит шесть неизвестных:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $\mu$ . Еще одним уравнением, связывающим эти неизвестные, является уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим некоторый объем  $V$  с постоянной формой и размерами. Изменение массы  $M$  жидкости в этом объеме за малое время  $dt$  есть

$$dM = M(t + dt) - M(t) = \frac{\partial M}{\partial t} dt = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2)$$

Здесь учтено, что по определению  $M = \int_V \rho dV$  и при постоянных границах объема операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени можно менять местами.

Масса вещества в объеме  $V$  может меняться за счет двух механизмов. Первый – вещество появляется или исчезает из этого объема вследствие каких-либо физико-химических реакций. Второй – за счет его некомпенсированного потока через границы объема. Не будем рассматривать первый механизм, так как он крайне не типичен для гидродинамических явлений.

Для анализа второго механизма выделим на поверхности нашего объема маленькую (элементарную) площадку с площадью  $ds$ . Выберем размеры этой площадки настолько маленькими, чтобы, во-первых, считать ее локаль-

но плоской и, во-вторых, чтобы на ее размерах можно было пренебречь изменением скорости потока и плотности среды. Обозначим через  $\mathbf{n}$  вектор единичной нормали к этой площадке, направленный наружу из объема  $V$ . Обозначим  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  проекцию вектора скорости  $\mathbf{v}$  на нормаль  $\mathbf{n}$ . Несложно показать, что за время  $dt$  через эту площадку из объема  $V$  наружу переходит масса вещества, равная

$$\rho v_n ds dt = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt. \quad (3)$$

Чтобы получить полную массу вещества, пересекающую изнутри наружу всю границу  $S$  объема  $V$ , нужно проинтегрировать (3) по поверхности рассматриваемого объема. Этот интеграл равен массе вещества, покидающего объем  $V$  за время  $dt$ , следовательно, он равен  $dM$ . Учитывая (1), получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (4)$$

По теореме Остроградского — Гаусса

$$\int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (5)$$

Используя (5) в (4), приходим к равенству

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (6)$$

При выводе равенства (6) не делали никаких оговорок относительно формы или размера объема  $V$ , по которому проводится интегрирование. Следовательно, это равенство выполняется для любого объема интегрирования, что возможно, только если подынтегральные функции в (6) тождественно равны. Учитывая это, приходим к уравнению (1). Заметим также, что при выводе этого уравнения не использовали никаких предположений о физических свойствах среды, кроме непрерывности изменения ее скорости и плотности.

Поэтому уравнение (1) в приближении сплошной среды описывает связь скорости и плотности в любом веществе независимо от его физической природы.

В качестве уравнений, замыкающих систему, используют уравнения состояния среды и зависимости вязкости от параметров состояния. Во многих случаях приходится применять также другие термодинамические соотношения.

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) в большинстве случаев вязкость можно считать постоянной, что позволяет значительно упростить уравнения.

Учитывая то, что для несжимаемой жидкости

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

получаем [3]

$$\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{du_x}{dt}; \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{du_y}{dt}; \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{du_z}{dt}. \end{aligned}$$

Вместе с уравнением неразрывности

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

образуется замкнутая система для определения функций  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и  $p$ . Частным случаем уравнений Навье-Стокса является уравнение Бернулли.

При выводе уравнений Навье-Стокса не делалось каких-либо предположений о режиме движения. Поскольку свойство вязкости присуще реальным жидкостям независимо от режима их движения и при переходе от ламинарного течения к турбулентному другие физические свойства не изменяются, можно предполагать, что обобщенная гипотеза Ньютона, а значит, и опирающиеся на нее уравнения Навье-Стокса справедливы как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости. Однако в последнем случае ис-

пользовать уравнения Навье-Стокса для получения каких-либо прикладных решений практически невозможно. Входящие в них мгновенные скорости и давление при турбулентных режимах являются пульсирующими. Даже если бы эти параметры удалось найти путем решения уравнений Навье-Стокса, что представляет крайне трудную задачу, то использовать их в практических целях было бы очень трудно. Поэтому для турбулентного режима определяют усредненные по времени скорости и давления, которые могут как зависеть, так и не зависеть от времени. В первом случае турбулентное течение считается неустановившимся, а во втором – установившимся.

Для получения уравнений турбулентного течения [4] используют уравнения Навье-Стокса, все члены которых усредняют по времени. В результате чего получается уравнение Рейнольдса для развитого турбулентного движения несжимаемой жидкости.

*Число Рейнольдса* — безразмерное соотношение, которое определяет *ламинарный* или *турбулентный режим* течения жидкости или газа. *Число Рейнольдса* также считается *критерием подобия* потоков. *Число Рейнольдса* определяется следующим соотношением [5]:

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu},$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $v$  — характерная скорость,  $l$  — характерный размер,  $\mu$  — *динамическая вязкость* среды.

*Ламинарное течение* — течение, при котором жидкость или газ перемещается слоями без перемешивания и пульсаций (то есть беспорядочных быстрых изменений) скорости и давления.

*Число Рейнольдса* как критерий перехода от *ламинарного* к *турбулентному режиму* течения и обратно относительно хорошо действует для *напорных потоков*.

Важным свойством *турбулентного течения* (по сравнению с *ламинарным*) является высокое сопротивление. При прокачивании жидкости по каналу в режиме *турбулентного движения* приходится преодолевать гораздо большее сопротивление, чем при *ламинарном* движении. Сопротивление происходит из-за того, что текущая по каналу жидкость отдает момент ко-

личества движения стенкам. В *ламинарном режиме* это происходит из-за вязкости, точнее, из-за трения жидкости о стенку. В *турбулентном* же режиме в этой передаче участвуют весьма энергичные турбулентные завихрения, пульсации, это как бы увеличивает эффективную *вязкость*.

**Метод конечных разностей.** Существует множество численных методов решения дифференциальных уравнений. Некоторые из них ищут решение в виде аналитических функций. Однако, для случаев со сложной геометрией или разрывами в граничных условиях такие методы становятся довольно громоздкими. Поэтому большинство численных методов решения дифференциальных уравнений рассматривают дискретно заданные («сеточные») функции, т.е. функции, заданные на некотором множестве точек, называемом сеткой [6].

Поговорим о сетках. В одномерном случае от сетки остается лишь конечное множество точек, заданное на отрезке, на котором ищется решение. Точки могут располагаться *равномерно* или *неравномерно*. В многомерном случае наблюдается огромное многообразие типов сеток. Приведем лишь несколько примеров.

Сетки бывают неравномерными (часто линии сетки сгущают в той области, где хотят поднять точность расчета).

Сетки бывают адаптивными (например, сетка, являющаяся прямоугольной в некоторой системе координат, связанной с поверхностью).

Правильный подбор типа и параметров сетки может существенно (в отдельных случаях на порядки) сократить ресурсы, требуемые для получения результата [7].

Точки пересечения линий сетки называются *узлами*. Элементарные области, ограниченные линиями сетки (плоскостями или иными поверхностями в трехмерном случае) называются *ячейками*. Значения искомой функции могут задаваться либо в узлах сетки, либо в каких-либо точках (например, в центрах) ячеек.

Численные методы решения дифференциальных уравнений, работающие с сеточными функциями, сводят исходную задачу к решению системы алгебраических уравнений. Одним из самых распространенных методов является метод конечных разностей [8].



Тело, в котором исследуется процесс теплопередачи, представляют в виде совокупности узлов. В дифференциальном уравнении производные аппроксимируются в виде конечно-разностных аналогов. Полученная система линейных алгебраических уравнений совместно с разностными аналогами граничных условий решается численными методами с помощью ЭВМ.

Достоинствами МКР являются: высокая эффективность и простота реализации, а также наглядность процедуры дискретизации области решения, дающая возможность построения схем относительно высокого порядка точности. Эти достоинства реализуются лишь *при использовании достаточно регулярной пространственной сетки с плавно меняющимися размерами ячеек*. Как следствие, подавляющее большинство приложений МКР ограничено случаями сравнительно простых по геометрии расчетных областей [9].

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

**Методы взвешенных невязок.** Рассмотрим дифференциальное уравнение вида [10]

$$A = L\varphi + p = 0 \quad (7)$$

в некоторой области  $\Omega$ .

Здесь  $L$  – некоторый линейный дифференциальный оператор, а  $p$  не зависит от неизвестной функции  $\varphi$ .

Решение уравнения (7) должно удовлетворять условию

$$B = M\varphi + r = 0 \quad (8)$$

на замкнутой кривой  $\Gamma$ , ограничивающей область  $\Omega$ .

Здесь  $M$  – соответствующий линейный дифференциальный оператор [11], а  $r$  не зависит от неизвестной функции  $\varphi$ . (Например, краевые условия Дирихле можно записать в виде (8), положив  $M\varphi = \varphi$ ,  $r$  – постоянный вектор.)

Построим аппроксимацию для решения  $\varphi$ , которая на граничной кривой  $\Gamma$  принимает те же значения, что и  $\varphi$  [12]. Если найти некоторую функцию  $\psi$ ,

принимающую одинаковые с  $\varphi$  значения на  $\Gamma$ , т.е.  $\psi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}$ , и ввести систему линейно независимых базисных функций  $\{N_m; m = 1, 2, \dots, M\}$ , то на  $\Omega$  можно предложить следующую аппроксимацию  $\widehat{\varphi}$  для  $\varphi$ :

$$\varphi \approx \widehat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (9)$$

где  $a_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  – некоторые параметры, вычисляемые так, чтобы получить хорошее приближение, а функция  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  выбраны таким образом, что

$$M\psi = -r, \quad MN_m = 0, \quad m = \overline{1, M} \quad \text{на } \Gamma, \quad (10)$$

и поэтому  $\varphi$  автоматически удовлетворяет краевым условиям (8) при произвольных коэффициентах  $a_m$ . Отметим, что система базисных функций (которые также называют функциями формы) должна быть выбрана так, чтобы гарантировать улучшение аппроксимации при возрастании числа базисных функций  $M$ .

Для того, чтобы найти аппроксимации производных от  $\varphi$ , продифференцируем (9), получим [13]:

$$\begin{aligned} \varphi \approx \widehat{\varphi} &= \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial N_m}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\approx \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

и т.д.

Так как построенное разложение (9) удовлетворяет краевым условиям (8), то для получения аппроксимации искомой функции  $\varphi$  осталось гарантировать, что  $\widehat{\varphi}$  – приближённое решение уравнения (7). Для этого вначале введём

погрешность или невязку  $R_\Omega$  в аппроксимации, определяемую по формуле

$$R_\Omega = A(\widehat{\varphi}) = L\widehat{\varphi} + p = L\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m LN_m \right) + p.$$

Чтобы уменьшить эту невязку, потребуем равенства нулю соответствующего числа интегралов от погрешности, взятых с различными весами, т.е.

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = \int_{\Omega} W_l \left\{ L\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m LN_m \right) + p \right\} d\Omega = 0; \quad l = \overline{1, M}; \quad (11)$$

где  $\{W_l : l = 1, 2, \dots, M\}$  – это множество линейно независимых весовых (или пробных) функций.

Таким образом, система уравнений метода взвешенных невязок (11) сводится к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов  $a_m$ , которую можно записать так [14]

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

где

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T,$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l LN_m d\Omega, \quad l, m = \overline{1, M}; \quad (12)$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l L\psi d\Omega, \quad l = \overline{1, M}. \quad (13)$$

Вычислив элементы матрицы  $\mathbf{K}$  и столбца свободных членов  $\mathbf{f}$  и решив затем полученную систему, мы найдём неизвестные  $a_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ ; и тем самым закончим процесс построения приближённого решения уравнения (7).

Отметим, что на практике могут быть использованы различные виды систем весовых функций  $\{W_l : l = \overline{1, M}\}$ . Приведём наиболее употребительные

варианты [15]: Коллокация по подобластям (одномерный случай) и Метод Галёркина.

**Метод конечных элементов.** В предыдущем разделе предполагалось, что базисные функции  $N_m$  определены одним выражением на всей области  $\Omega$ . При этом интегралы в аппроксимирующих уравнениях (11) вычислялись по всей этой области.

С другой стороны, область  $\Omega$  можно разбить на несколько непересекающихся подобластей (или элементов  $\Omega^e$ ) и аппроксимировать решение уравнения отдельно на каждой подобласти. Тогда базисные функции могут быть определены различным образом для каждой из подобластей  $\Omega^e$ . В этом случае определённые интегралы, входящие в аппроксимирующие уравнения, можно подсчитать просуммировав вклады по каждому элементу:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega^e, \\ \int_{\Gamma} \overline{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma &= \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma} W_l R_{\Gamma} d\Gamma^e; \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$ ,  $\sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma$ ;  $E$  – число подобластей, на которые разбивается область  $\Omega$ ;  $\Gamma^e$  – часть границы  $\Omega^e$ , лежащая на  $\Gamma$ .

Идея метода конечных элементов заключается в следующем: если подобласти имеют простую форму и базисные функции на этих подобластях вычисляются однотипно, то решать задачу указанным выше способом становится очень просто. Отметим, что рассмотренные в предыдущем разделе методы взвешенных невязок есть частный случай метода конечных элементов, когда используется лишь один элемент.

Если базисные функции определены кусочным способом, то весьма выгодно положить, что базисная функция равна нулю всюду, кроме рассматриваемого элемента и примыкающих к нему подобластей. Рассмотрим подробнее одномерный случай. Пусть область  $\Omega = [0; L]$ . Разобьём её на  $E$  подобластей вида  $\Omega^e = [x_e; x_{e+1}]$  ( $x_1 = 0$ ,  $x_{E+1} = L$ ). Часто применяются базисные функции  $N_m$ , удовлетворяющие следующим условиям:

1.  $N_m(x_m) = 1$ ;

2.  $N_m(x_{m-1}) = 0$ , на отрезке  $[x_{m-1}; x_m]$   $N_m$  изменяется линейно,  $m \neq 1$ ;
3.  $N_m(x_{m+1}) = 0$ , на отрезке  $[x_m; x_{m+1}]$   $N_m$  изменяется линейно,  $m \neq E$ .

Получим:

$$N_m = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_{m-1}, m > 1; \\ \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & \text{если } x_{m-1} < x < x_m, m > 1; \\ 1, & \text{если } x = x_m; \\ \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, & \text{если } x_m < x < x_{m+1}, m < E; \\ 0, & \text{если } x \geq x_{m+1}, m < E. \end{cases} \quad (15)$$

На практике слагаемое, содержащее взвешенную невязку по области

$$\int_{\Omega} W_l L N_m d\Omega,$$

часто может быть заменено выражением вида

$$\int_{\Omega} (E W_l)(D N_m) d\Omega + \text{интегралы по границе } \Gamma,$$

где операторы  $E$  и  $D$  включают в себя производные более низких порядков, чем исходный оператор  $L$ . Преимущество такого преобразования при использовании кусочно-определённых базисных функций состоит в том, что для последних теперь требуется более низкий порядок гладкости.

**Метод конечных объемов.** Отправной точкой метода конечных объёмов (МКО) является интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса, энергии и др. [16]. Балансовые соотношения записываются для небольшого контрольного объема; их дискретный аналог получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и т.д., вычисленных по каким-либо квадратурным формулам. Поскольку интегральная формулировка законов сохранения не накладывает ограничений на форму контрольного объема, МКО пригоден для дискретизации уравнений гидрогазодинамики как на структурированных, так и на неструктурированных

ных сетках с различной формой ячеек, что, в принципе, полностью решает проблему сложной геометрии расчетной области.

**OpenFOAM.** OpenFOAM — это открытая (GPL) платформа для численного моделирования — в первую очередь для моделирования, связанного с решением уравнений в частных производных методом конечных объемов, и в самую первую очередь — для решения задач механики сплошных сред. OpenFOAM состоит из двух частей: это, во-первых, библиотека классов для многих операций, необходимых при численном моделировании, — и во-вторых, библиотека программ («солверов»), использующих эти классы и позволяющих решать конкретные задачи моделирования [17].

ParaView — мультиплатформенный программный продукт с открытым исходным кодом для визуализации и анализа данных. Может работать как на одном компьютере, так и на параллельном кластере. С его помощью можно создавать изображения данных, пригодные для презентации без дополнительной обработки.

**Постановка задачи.** Необходимо исследовать движение жидкости в канале, показанном в соответствии с рисунком 1.

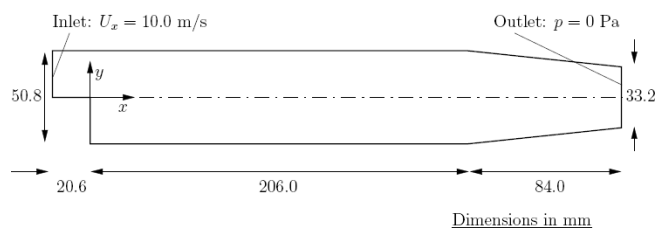


Рисунок 1 — Схема канала, размеры в мм

На входе в канал скорость равна 10 м/сек, на выходе давление равно 0 Па. Требуется рассмотреть как стационарный, так и нестационарный случаи.

Математическая модель движения жидкости в канале описывается следующими уравнениями.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0.$$

Уравнение изменения момента

$$\nabla \cdot \mathbf{UU} + \nabla \cdot \mathbf{R} = -\nabla p.$$

Здесь  $p$  – кинематическое давление;  $\mathbf{R} = \nu_{eff} \nabla \cdot \mathbf{U}$  – слагаемое, отвечающее за вязкие напряжения,  $\nu_{eff}$  – вычисленная эффективная кинематическая вязкость.

В начальный момент времени во всём канале скорость равна 0 м/сек, давление равно 0 Па.

Граничные условия имеют вид:

1. На входе в канал (inlet) задана постоянная скорость  $\mathbf{U} = (10, 0, 0)$  м/сек.
2. На выходе из канала (outlet) задано постоянное давление  $p = 0$  Па.
3. На остальных стенах задано условие неприлипания.

В расчётах использована стандартная  $k - \epsilon$  модель турбулентности. Коэффициенты модели равны:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\alpha_k = 1$ ,  $\alpha_\epsilon = 0.76923$ .

Ход решения задачи можно схематично описать так:

1. Декомпозиция расчетной области на ячейки;
2. Запись законов сохранения для каждой ячейки в интегральной форме;
3. Разложение функции в ряд Тейлора;
4. Аппроксимация интегралов по объему и поверхности;
5. Формула Остроградского-Гаусса и теорема о среднем;
6. Линейная интерполяция функции для нахождения значений в центре грани;
7. Итерационный метод решения СЛАУ (Метод бисопряженных градиентов PCG, PBiCG с предобуславливателем DILU) [19];
8. Задание невязок и проведение расчета.

Заметим, что в данной работе был использован алгоритм PISO, схема которого приведена в работе.

**Примеры численного решения задачи.** Для того, чтобы произвести расчёты, вначале требуется построить вычислительную сетку. Для этого нужно выполнить команду `blockMesh`.

Затем запустим решатель simpleFOAM для расчёта стационарного течения жидкости.

Для того, чтобы построить законы изменения скорости и давления, воспользуемся paraview.

Результаты расчётов с помощью «решателя» simpleFOAM приведены в работе.

Теперь рассчитаем нестационарное течение жидкости с помощью модели LES (Large Eddy Simulation) [20]. Для этого после построения сетки запустим решатель pisoFOAM.

Результаты расчётов с помощью «решателя» pisoFOAM приведены в работе.

Заметим, что в этом случае появляются вихри.

**Заключение.** В работе проведён расчёт течения вязкой жидкости в канале с уступом. Система дифференциальных уравнений в частных производных относительно скорости и давления была решена с помощью метода конечных объемов. Расчёт проведён с помощью пакета прикладных программ OpenFOAM. Построены графики изменения скорости и давления для стационарного и нестационарного случаев. Установлено, что при использовании метода LES появляются вихри.