МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

# Нестационарный пограничный слой на плоской полубесконечной пластине в начальной стадии ее движения в вязкой жидкости из состояния покоя

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Поповой Елизаветы Викторовны

Научный руководитель
старший преподаватель В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент Ю.А. Блинков

Саратов 2019

**Введение.** Процессы и явления, связанные с течениями жидкостей и газа имеют важное теоретическое и прикладное значение [1,2]. Одним из основных разделов механики жидкостей является теория пограничного слоя [3].

Вязкость жидкости может иметь существенное влияние на характер ее течения, а следовательно и на гидродинамические параметры потока. На данную особенность было указано ещё в гидродинамике Д. Бернулли. В работах Навье, Пуассона и Стокса также имеются указания на то, что в связи с учётом вязкости жидкости должны измениться граничные условия вблизи стенок.

Идея о преобладающем влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок была высказана в работе Д. И. Менделеева, а затем в лекциях Н. Е. Жуковского. Своё оформление в виде уравнений эта идея получила в работе Прандтля представленной 12 августа 1904 года. Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости/газа уравнения путём разделения потока на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Среди работ по теории пограничного слоя можно выделить не только фундаментальные труды Шлихтинга [1] и Лойцянского [4], но и работы [5,6].

Среди методов решения задач теории пограничного слоя можно выделить как аналитические, так и численные методы.

В данной работе решается задача о движении жидкости под действием пластины, начинающей свое движение с заданном законом изменения ее скорости.

Целью работы является проведение математического моделирования зависимости распределения скорости движения жидкости от закона движения пластины.

Первый раздел посвящен физической постановке задачи.

Второй раздел посвящен разработке математической модели для случая Ньютоновской среды. В частности: выведено уравнение описывающее течение в пограничном слое и определены соответствующие ему начальные и граничные условия, осуществлен переход к автомодельным переменным в полученной краевой задаче и сформулирована автомодельная задача, рассмотрен алгоритм численного решения, по нему построена блок-схема и написана программа на языке Python, выполняющая этот алгоритм, представлены результаты расчетов в разработанной программе.

Третий раздел посвящен разработке математической модели для случая Неньютоновской среды. При этом: выведено уравнение описывающее течение в пограничном слое и определены соответствующие ему начальные и граничные условия, осуществлен переход к автомодельным переменным в полученной краевой задаче и сформулирована автомодельная задача, рассмотрен алгоритм численного решения, по нему построена блок-схема и написана программа на языке Python, выполняющая этот алгоритм, представлены результаты расчетов в разработанной программе.

В заключении сделаны общие выводы по результатам полученных в работе.

**Физическая постановка задачи.** Рассматриваем полупространство, занятое неподвижной вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянным давлением. При исследовании плоской задачи, будем считать, что это верхнее полупространство, отделено от нижнего полупространства абсолютно жесткой пластиной. В начальный момент времени скорость пластины равна нулю, и она приходит в движение в своей собственной плоскости. Закон изменение скорости считаем в заданном виде $u = At^{\alpha}$ в соответствии с рисунком 1, рисунком 2. Полагаем, что на границе контакта жидкости и пластины выполняются условия прилипания, другими словами, скорости движения пластины и жидкости на линии контакта совпадают. Введем декартовую систему, центр которой в невозмущенном состоянии совпадает с пластиной ось $x$ направим в плоскости пластины, ось $y$ перпендикулярно к пластине. Компоненты скорости вдоль оси $x$ обозначаем $U$, а компоненту скорости вдоль оси $y$ обозначаем как $v$.

**Случай Ньютоновских сред.** Во введенной системе координат плоский поток вязкой жидкости приходит в движение увлекаемый пластины, которая движется с постоянным ускорением вдоль оси $x$. Вдоль этой границы

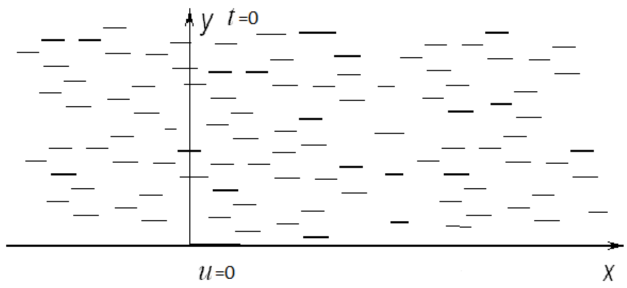


Рисунок 1 — Расчетная схема в момент времени $t_0 = 0$

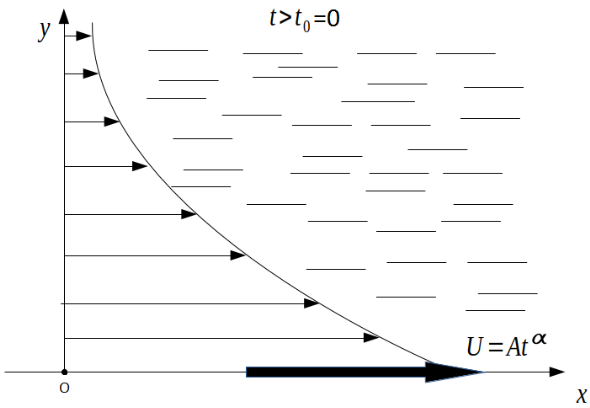


Рисунок 2 — Расчетная схема в момент времени $t_0 > 0$

образуется пограничный слой. Так как жидкость внутри пограничного слоя является вязкой, то для изучения ее движения используем дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости, которые для плоского потока будут иметь следующий вид: В начальный момент времени пластина и вязкая несжимаемая жидкость, занимающая полупространство над пластиной, покоятся. Затем пластина начинает равноускоренное движение с ускорением $A = \mathrm{const}$.

Пренебрегая градиентом давления и считая, что движение жидкости происходит только вдоль оси $x$, т.е. $\upsilon \equiv 0$, получим:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $u$ – продольная (вдоль оси Ox) составляющая скорости жидкости, $t$ – время, $y$ – координата. Граничные условия на поверхности пластины имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y = 0 : u = At. \tag{2}$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y \to \infty : u \to 0. \tag{3}$$

Начальные условия:

$$\text{при } t = 0, y \geq 0 : u = 0. \tag{4}$$

**Постановка краевой задачи в автомодельных переменных.** Введем масштабные величины. Обозначим через $T$ – масштаб времени, через $U$ – масштаб скорости в направлении оси $x$, через $Y$ – масштаб длины в направлении оси $y$:

$$t = T\overline{t}, \tag{5}$$

$$u = U\overline{u}, \tag{6}$$

$$y = Y\overline{y}. \tag{7}$$

Учитывая, что движение равноускоренное, то масштаб скорости может быть принят как:

$$u = AT\overline{t}\overline{u}. \tag{8}$$

Подставляя (5) ,(6) и (8) в (1) получим:

$$\rho \frac{AT\overline{t}}{T}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} = \mu \frac{AT\overline{t}}{Y^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial^2 \overline{y^2}}.$$

Так как масштабы в уравнении слева и справа должны совпадать, то приравнивая коэффициенты при производных получаем:

$$\rho = \frac{\mu T}{Y^2} \;\Rightarrow\; Y = \sqrt{\frac{\mu T}{\rho}}.$$

Переходя к безразмерным переменным будем иметь:

$$u = At\overline{u}\left(\frac{t}{T}, y\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}\sqrt{\frac{t}{T}}\right). \tag{9}$$

Поскольку решение задачи для функции $u$ недолжно зависеть от $T$, то это значит, что функция $\overline{u}$ не зависит от 1-ого аргумента, т.е. соотношение (9) можно переписать так

$$u = Atf(\eta),\ \eta = y\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}} = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}, \tag{10}$$

где $f$ – автомодельный представитель функции $u, \eta$ – независимая автомодельная переменная, $\nu$ – кинематический коэффициент вязкости.

Покажем, что данный выбор может свести задачу к автомодельной, т.е. к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого найдем производные:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Af(\eta) + Atf'(\eta)\left(-\frac{\eta}{2t}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Atf'(\eta)\frac{1}{\sqrt{\nu t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Atf''(\eta)\frac{1}{\nu t}. \tag{12}$$

Подставляем (11)-(12) в (1), получаем:

$$f''(\eta) + \frac{\eta}{2}f'(\eta) - f(\eta) = 0. \tag{13}$$

Теперь представим граничные условия (2) - (4) в автомодельных переменных. Для этого воспользуемся соотношением (10) и выражением для независимой автомодельной переменной $\eta$:

$$\eta = y\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}} = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}. \tag{14}$$

Граничное условие на поверхности пластины принимает вид:

$$\text{при } \eta = 0 \ : \ f(0) = 1. \tag{15}$$

Граничное условие «на бесконечности» принимает вид:

$$\text{при } \eta \to \infty \ : \ f|_{\eta\to\infty} \to 0. \tag{16}$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о движении жидкости под действием пластины, начинающей равноускоренное движение, сводится к решению задачи (13) с граничными условиями (15) - (16).

Для решения задачи применяется метод пристрелки, который представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

**Численное решение краевой задачи.** Обсудим численное решение краевой задачи (14)-(16). Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) (14) является ОДУ 2-го порядка относительно функции $f$. Для численного интегрирования этого уравнения на полуинтервале $[0, \infty)$ необходимо наличие двух начальных условий, а именно при $\eta = 0$ необходимо знать

$$f(0) = y_{00} = 1, \ \frac{df}{d\eta}|_{\eta=0} = y_{01}.$$

Тогда для ОДУ (14) имели бы задачу Коши [11].

Однако известно только одно условие $y_{00}$. Значение $y_{01}$ необходимо определить. Оно должно быть таким, чтобы при $\eta \to \infty$ выполнялось условие (16).

При реализации численного интегрирования вместо полуинтервала $[0, \infty)$ рассматривается интервал $[0, \eta_k]$, где $\eta_k$– достаточно большое число. Условие

(16) при этом заменяется условием:

$$\text{при } \eta = \eta_k \ (\eta_n \gg 1) \ : \ f|_{\eta=\eta_k} = y_{10} = 0. \tag{17}$$

Обозначим $y_{10}$ – значение производной $\frac{df}{d\eta}$ при $\eta = \eta_k$.

Для решения краевой задачи для ОДУ (14), был применен метод пристрелки, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

**Результаты расчетов.** При расчетах исследовали поведение безразмерной скорости $\frac{u}{At} = f(\eta)$ на различных отрезках автомодельных переменной $\eta$. Графики зависимости безразмерной скорости от $\eta$ представлены на рисунках в работе. При этом рассматривались соответственно интервалы по $\eta$: $[0, 2], [0, 4], [0, 6], [0, 8], [0, 10]$.

Из представленных графиков расчетных значений безразмерной скорости на различных интервалах видно, что с ростом $\eta$ толщина пограничного слоя резко падает. После $\eta = 4$ толщина пограничного слоя стремиться к 0, т.е. пограничный слой практически отсутствует. Если увеличивать значение ускорение пластины $A$, толщина пограничного слоя будет возрастать прямо пропорционально этому увеличению.

**Случай Неньютоновских сред.** Во введенной системе координат плоский поток вязкой жидкости приходит в движение увлекаемый пластины, которая движется с постоянным ускорением вдоль оси $x$. Вдоль этой границы образуется пограничный слой. Так как жидкость внутри пограничного слоя является вязкой, то для изучения ее движения используем дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости, которые для плоского потока будут иметь следующий вид: В начальный момент времени пластина и вязкая несжимаемая жидкость, занимающая полупространство над пластиной, покоятся. Затем пластина начинает равноускоренное движение с ускорением $A = \text{const}$.

Пренебрегая градиентом давления и считая, что движение жидкости происходит только вдоль оси $x$, т.е. $\upsilon \equiv 0$, получим:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu_* n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{18}$$

где $u$ – продольная (вдоль оси Ох) составляющая скорости жидкости, $t$ – время, $y$ – координата. Граничные условия на поверхности пластины имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y = 0 : u = At^{\alpha}. \tag{19}$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y \to \infty : u \to 0. \tag{20}$$

Начальные условия:

$$\text{при } t = 0, y \geq 0 : u = 0. \tag{21}$$

**Постановка краевой задачи в автомодельных переменных.** Введем масштабные величины. Обозначим через $T$ – масштаб времени, через $U$ – масштаб скорости в направлении оси $x$, через $Y$ – масштаб длины в направлении оси $y$:

$$t = T\overline{t}, \tag{22}$$

$$u = U\overline{u}, \tag{23}$$

$$y = Y\overline{y}. \tag{24}$$

Учитывая, что движение равноускоренное, то масштаб скорости может быть принят как:

$$u = AT^{\alpha}\overline{t}^{\alpha}\overline{u}. \tag{25}$$

Подставляя (22) ,(23) и (25) в (18) получим:

$$\rho\frac{AT^{\alpha}\overline{t}^{\alpha}}{T}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}} = \mu_{*}\frac{AT^{\alpha}\overline{t}^{\alpha}}{Y^2}\left|\frac{AT^{\alpha}\overline{t}^{\alpha}}{Y}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right|^{n-1}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial^2\overline{y^2}}.$$

Так как масштабы в уравнении слева и справа должны совпадать, то приравнивая коэффициенты при производных получаем:

$$\rho = \mu_* \frac{A^{n-1}T^{\alpha n}}{Y^{n+1}} \ \Rightarrow\ Y = \sqrt[n+1]{\mu_* \frac{A^{n-1}T^{\alpha n}}{\rho}}$$

Переходя к безразмерным переменным будем иметь:

$$u = At^{\alpha}\overline{u}\left(\frac{t}{T}, y/\sqrt[n+1]{\mu_* \frac{A^{n-1}T^{\alpha n}}{\rho}}\right). \tag{26}$$

Поскольку решение задачи для функции $u$ недолжно зависеть от $T$, то это значит, что функция $\overline{u}$ не зависит от 1-ого аргумента, т.е. соотношение (26) можно переписать так

$$u = At^{\alpha} f(\eta),\ \eta = y\left(\frac{\rho}{\mu_* A^{n-1}t^{\alpha n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{27}$$

где $f$ – автомодельный представитель функции $u, \eta$ – независимая автомодельная переменная, $\nu$ – кинематический коэффициент вязкости.

Покажем, что данный выбор может свести задачу к автомодельной, т.е. к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого найдем производные:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\eta \frac{\alpha(n-1)+1}{(n+1)t},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\mu_*}{\rho}A^{n-1}t^{\alpha(n-1)+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\alpha t^{\alpha-1}f(\eta) + At^{\alpha}f'(\eta)\left(-\eta\frac{\alpha(n-1)+1}{(n+1)\,t}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = At^{\alpha}f'(\eta)\frac{1}{\left(\frac{\mu_*}{\rho}A^{n-1}t^{\alpha(n-1)+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = At^{\alpha}f''(\eta)\frac{1}{\left(\frac{\mu_*}{\rho}A^{n-1}t^{\alpha(n-1)+1}\right)^{\frac{2}{n+1}}}. \tag{29}$$

Подставляем (28)-(29) в (18), получаем:

$$f''(\eta)\left|f'(\eta)\right|^{n-1}+\eta\left(\frac{\alpha(n-1)+1}{n+1}\right)f'(\eta)-\alpha f(\eta)=0. \tag{30}$$

Теперь представим граничные условия (19) - (21) в автомодельных переменных. Для этого воспользуемся соотношением (17) и выражением для независимой автомодельной переменной $\eta$:

$$\eta=y\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}=\frac{y}{\sqrt{\nu t}}. \tag{31}$$

Граничное условие на поверхности пластины принимает вид:

$$\text{при } \eta=0\ :\ f(0)=1. \tag{32}$$

Граничное условие «на бесконечности» принимает вид:

$$\text{при } \eta\to\infty\ :\ f|_{\eta\to\infty}\to 0. \tag{33}$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о движении жидкости под действием пластины, начинающей равноускоренное движение, сводится к решению задачи (30) с граничными условиями (32) - (33).

Для решения задачи применяется метод пристрелки, который представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Численное решение краевой задачи такое же как и для случая Ньютоновской среды.

**Результаты расчетов.** При расчетах исследовали поведение безразмерной скорости $\frac{u}{At^{\alpha}}=f(\eta)$ на различных отрезках автомодельных переменной $\eta$. Графики зависимости безразмерной скорости от $\eta$ представлены на рисунках в работе. При этом рассматривались соответственно интервалы по $\eta$: $[0,2], [0,4], [0,6], [0,8], [0,10]$.

**Заключение.** Разработана физическая и математическая модели для исследования движения вязкой жидкости под действием пластины, приведенной в движение с постоянным ускорением. Осуществим переход и автомодельный переменным и сформулирована автомодельная задача. Ее решение приведено численно, методом, представляющим комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка, построена блок-схема и написана программа на языке Python, выполнены численные расчеты. Моделирование показало, что толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением ускорения пластины. Также из расчётов следует, что ускорение тоже влияет на толщину пограничного слоя.