

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

**Особенности перехода к хаосу в связанных отображениях Эно с квадратичной связью, не вносящей дополнительной диссипации**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки \_\_4\_\_ курса \_\_421\_\_ группы  
направления 03.03.03 «Радиофизика»  
Факультета нелинейных процессов  
Костылевой Екатерины Александровны

Научный руководитель  
доцент кафедры ФОС, к.ф.-м.н

Д.В.Савин

Зав. кафедрой электроники, колебаний и волн

чл.-корр. РАН, профессор

Д.И.Трубецков

Саратов 2016 г.

## **Введение**

Поведение нелинейных колебательных систем, в частности, демонстрирующих хаотическую динамику, является предметом активных исследований в теории колебаний и радиофизике в течение долгого времени. Так как исследуемые явления достаточно сложны, в большинстве случаев аналитическое рассмотрение провести не удаётся, и приходится исследовать систему численно. В таких случаях всегда полезно упростить модель таким образом, чтобы она с одной стороны не потеряла основных свойств, а с другой — не требовала больших затрат при численном моделировании. С этой точки зрения удобным инструментом являются дискретные отображения [1]. Они способны демонстрировать все основные явления, характерные для нелинейных колебательных систем, в том числе большое разнообразие бифуркаций [2] и переход к хаосу по различным сценариям [3].

Одной из интересных областей науки о нелинейных колебаниях является исследование поведения связанных колебательных систем различной природы и при различных видах связи. Чаще всего объектом исследования является синхронизация колебаний в связанных подсистемах [4]. Нужно отметить, что введение связи позволяет наблюдать в системе новые типы динамики, нехарактерные для подсистем по отдельности. Например, известно, что квадратичное отображение способно демонстрировать существование циклов (периодических режимов) различных периодов, а также переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Система из двух связанных квадратичных отображений способна кроме этого демонстрировать квазипериодические колебания вблизи линии на плоскости параметров, на которой связанные отображения идентичны [5]. Соответственно, в таких системах возможно наблюдение различных типов поведения на пороге хаоса. Чтобы изучать изменения бифуркационной структуры при изменении связи, можно, следуя подходу, развитому в [5-7], рассматривать изменения, которые происходят при этом на плоскости параметров, отвечающих за нелинейность в подсистемах. Недавно было

показано, что в системе отображений Эно с линейной связью, не вносящей дополнительной диссипации, в структуре плоскости параметров происходят существенные изменения при изменении уровня диссипации в подсистемах [8]. Линия перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума, к которой при сильной диссипации в системе накапливаются непрерывные линии удвоения периода, претерпевает разрыв, т. е. начиная с определённого периода линии бифуркаций удвоения периода, перестают быть непрерывными. Эти разрывы могут быть двух типов: один из них вызывается появлением области квазипериодичности, а другой — слиянием основной области периодических режимов с окном периодических режимов.

В нашей работе предстоит исследовать изменения, которые происходят со структурой плоскости параметров отображений Эно с квадратичной связью при изменении диссипации. Работа устроена следующим образом. В первой главе приводятся основные сведения о дискретных отображениях, проводится обзор основных численных методов их исследования, описывается исследуемая модель. Во второй главе исследуется плоскость параметров такой системы.

## Глава 1. Численные методы исследования нелинейных отображений. Переход к хаосу.

1.1 Построение итерационной диаграммы для логистического отображения.

Свойства дискретных отображений удобно иллюстрировать на итерационной диаграмме. Задав дискретное отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  необходимо на плоскости  $(x_n, x_{n+1})$  построить график функции  $f(x)$  и биссектрису. Далее, задав начальное значение  $x_1$ , можно по графику найти  $x_2=f(x_1)$ , после чего это значение переносится на биссектрису и операция повторяется. Появляется своего рода «лесенка», отображающая итерационный процесс и позволяющая определить тип динамического режима, наблюдающегося в системе. [9]

1.2 Построение бифуркационного дерева для логистического отображения.

Для наглядного изображения последовательности возможных бифуркаций – качественных изменений динамического режима – в исследуемой системе можно построить бифуркационное дерево, которое представляет собой зависимость возможных дискретных значений динамической переменной на аттракторе от параметра.

1.3 Построение бифуркационного дерева для отображения Эно

Из необратимого квадратичного (логистического) отображения можно построить обратимое двумерное отображение Эно:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

где  $\lambda, b$ -параметры отображения.

Мишель Эно, астрофизик из Франции, предложил это отображение в 1976 г. как абстрактный пример динамической системы, содержащий странный аттрактор. Несмотря на это с его помощью можно описывать

динамику ряда физических систем, таких как, диссипативный осциллятор и ротатор под импульсным периодическим воздействием. [3,9]

Рассчитаем матрицу якоби для отображения Эно.

Для этого надо найти соответствующие частные производные от уравнения

$$\hat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_0 - b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из данной матрицы по известному правилу вычисления определителя получаем, что якобиан  $J=b$ .

При  $|b| < 1$  отображение Эно является диссипативной системой.

При  $b \rightarrow 0$  оно сводится к логистическому отображению, а при  $b \rightarrow 1$  - это отображение, сохраняющее площадь, т.е. консервативная система.

Рассмотрим бифуркационные деревья этого отображения при разных значениях  $b$ .

#### 1.4 Построение карты динамических режимов для отображения Эно.

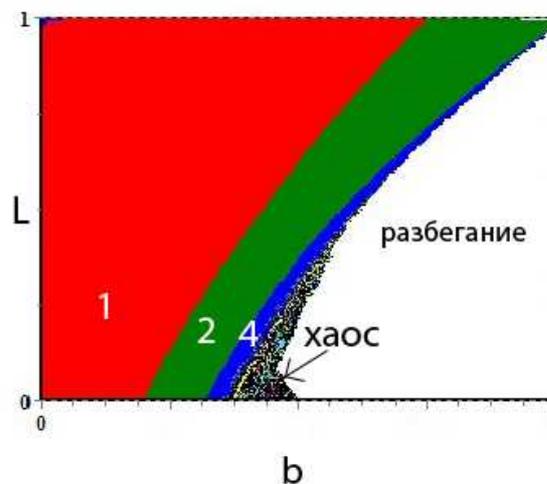


Рис.1 Карта динамических режимов для отображения Эно

#### 1.5 Построение бифуркационного дерева для связанных отображений Эно.

Рассмотрим систему связанных идентичных отображений Эно.

$$x_{n+1} = 1 - L * x_n^2 - b * y_n - E * (x_n^2 - U_n^2)$$

$$y_{n+1} = x_n$$

$$U_{n+1} = 1 - L * U_n^2 - b * V_n - E * (U_n^2 - x_n^2)$$

$$V_{n+1} = U_n$$

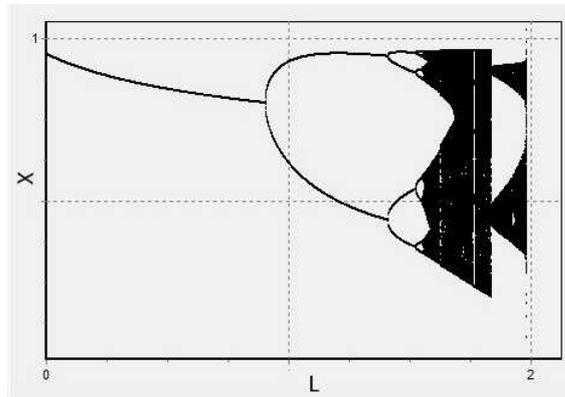


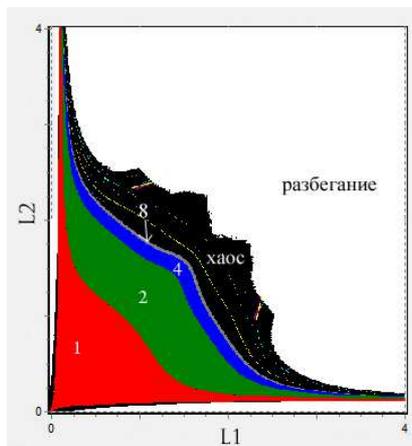
Рис.2 Бифуркационное дерево для связанных отображений Эно при постоянном  $b=0.1$  и параметре связи  $E=0.15$

После того, как происходит переход к хаосу при больших значениях параметра  $\lambda$ , мы наблюдаем переход к квазипериодической динамике.

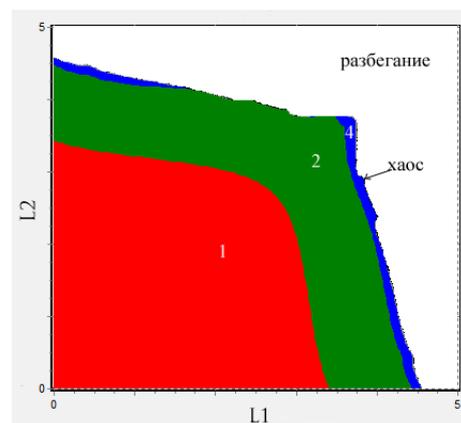
При увеличении параметра  $b$  так же, как и в отображении Эно, происходит увеличение области существования периодических режимов и уменьшение — непериодических.

## Глава 2. Переход к хаосу в системе связанных отображений Эно с квадратичной связью.

2.1 Построение карт динамических режимов для связанных отображений Эно.



(a)



(б)

Рис.3 Карты динамических режимов для связанных отображений Эно при постоянном  $E=0.4$  и изменяемом параметре диссипации: (а)  $b=0.1$ ; (б)  $b=0.9$ .

Из рис.3 видно, что при малых  $b$  наблюдается последовательность непрерывных линий удвоения периода. При  $b$  от 0.7 по 0.9 видим, что однородная структура линий удвоения периода на границе хаоса нарушается. Исследуем структуру плоскости параметров в окрестности этих «неоднородностей» более детально, для чего построим соответствующие увеличенные фрагменты.(Рис.4)

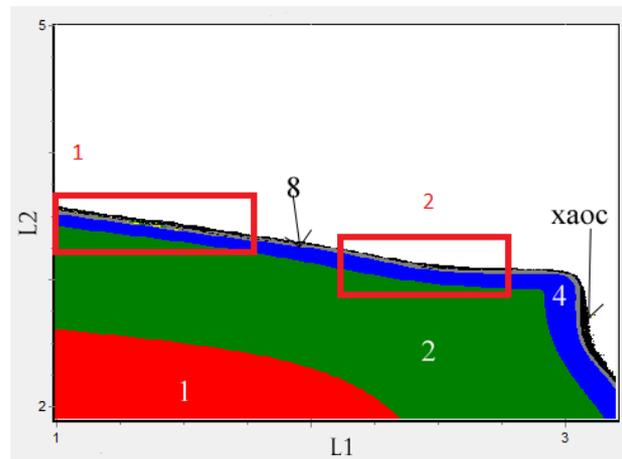
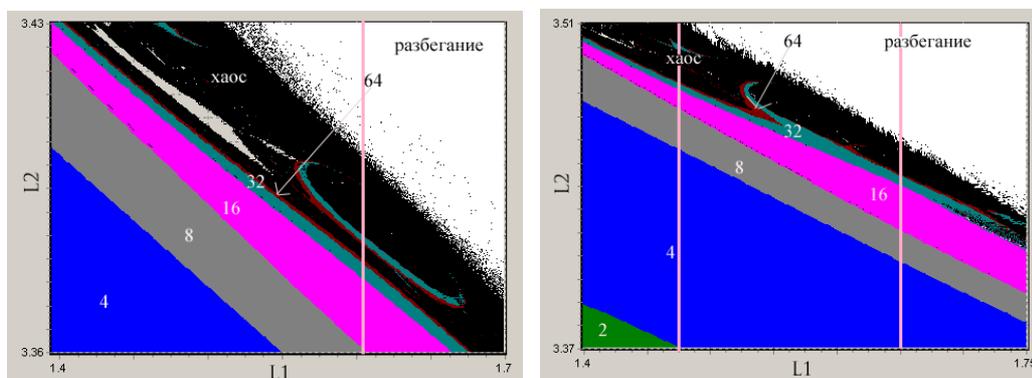


Рис.4 Увеличенный фрагмент карты динамических режимов для связанных отображений Эно при постоянном  $E=0.4$  и параметре диссипации  $b=0.7$ .

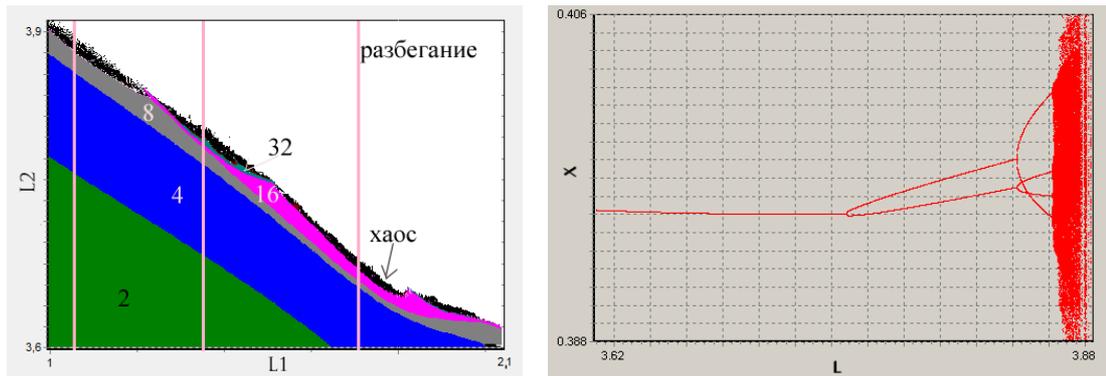
Существуют две области в которых наблюдаются неоднородности в районе перехода к хаосу. Рассмотрим эти области более подробно, для чего будем строить увеличенные фрагменты карт динамических режимов и смотреть как они изменяются при изменении параметра  $b$ .



(а)

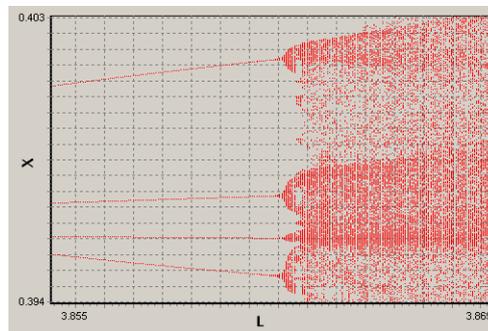
(б)

Рис.5 Увеличенные фрагменты карты динамических режимов для связанных отображений Эно при  $E=0.4$  и  $b=0,7$ (а) и при  $E=0.4$  и  $b=0,72$  (б).



(а)

(б)



(в)

Рис.6 Увеличенный фрагмент карты динамических режимов для связанных отображений Эно при  $E=0.4$  и  $b=0.8$ (а) и бифуркационное дерево для увеличенного фрагмента карты динамических режимов для связанных отображений Эно построенное по линии при  $L1=1.15$  на рис.19 (б) и увеличенный фрагмент бифуркационного дерева в окрестности перехода к хаосу (в).

На рис.5 видно, что у нас образовалось окно периодических режимов. При увеличении параметра диссипации, это окно периодических режимов слилось с основной областью (рис.5(б)).

На рис.6 видно, что у нас существуют три варианта развития: каскад удвоений, переход жестким образом и через квазипериодику.

Таким образом, видим, что при  $b=0,7$  был переход только через каскад удвоения периода, а при  $b=0,8$  существуют три варианта перехода. Приходим

к выводу, что не все линии удвоения периода непрерывны, некоторые по-прежнему непрерывные, например удвоение для перехода два, а для более высоких периодов существуют разрывы на линиях удвоения.

## **Заключение**

В работе проведен краткий обзор основных методов численного исследования дискретных отображений. С помощью различных численных методов проведено исследование поведения системы отображений Эно с квадратичной связью, не вносящей дополнительной диссипации, при изменении уровня диссипации в системе. В частности, построены карты динамических режимов на плоскости параметров, управляющих нелинейностью в подсистемах. Показано, что для значений параметра диссипации  $b$  от 0,1 по 0,6 переход к хаосу происходит по сценарию Фейгенбаума через каскад удвоения периода. При дальнейшем увеличении параметра  $b$  (уменьшении уровня диссипации) структура плоскости параметров на границе хаоса становится более сложной. Для значений параметра диссипации от 0,7 по 0,9 были построены увеличенные фрагменты карт динамических режимов. При их анализе было установлено, что на линии перехода к хаосу возникают разрывы (т.е. области, в которых каскад бифуркаций удвоения периода конечен) двух типов. Один из них связан с тем, что в результате слияния основной области периодических режимов с окном периодических режимов возникает область, в которой переход к хаосу происходит жестким образом, а другой из них связан с тем, что появляются области квазипериодических движений.

## **Список использованной литературы**

1. А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина. Бифуркации отображений, Саратов: ООО Издательский центр "Наука", 2012, 196 с.
2. А.П.Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М.Рыскин. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. - 292с.

3. С.П. Кузнецов. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. - 296с.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 493 с.
5. J.-M. Juan, M. Tung, D.H. Feng, L.M. Narducci. Instability and irregular behavior of coupled logistic equations. //Physical Review A, 1983, **28**, № 3, pp. 1662–1666.
6. K. Satoh, T. Aihara. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system. //Journal of the Physical Society of Japan, 1990, **59**, № 4, pp. 1184–1198.
7. А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, И.Р. Сатаев. Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода. //Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 2004, **12**, №5, сс. 46–56.
8. D.V. Savin, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, and U. Feudel. Different types of critical behavior in conservatively coupled Hénon maps. Phys. Rev. E, **91**, 2015, 062905.
9. Введение в физику нелинейных отображений - Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Саратов: изд-во «Научная книга», 2010, 134 с.