

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

**Квазичаплыгинские уравнения и их приложение к некоторым
задачам квазигазовых неустойчивых сред**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Факультета Нелинейных Процессов
Горанова Мирослава Здравкова

Научный руководитель

Зав. кафедрой, профессор, д.ф.-м.н.

чл.-корр. РАН

Д.И. Трубецков

Зав. кафедрой электроники, колебаний и волн

профессор, д.ф.-м.н.

чл.-корр. РАН

Д.И. Трубецков

Саратов 2016 г.

Введение

Вопросы, связанные с устойчивостью или неустойчивостью различных сред по отношению к разного вида возмущениям всегда были и остаются одной из актуальных задач радиофизики и всей нелинейной физики. При этом важным представляется отыскать небольшое число моделей, которые описывали бы разнообразные системы различной природы.

Цель настоящей бакалаврской работы, которая сочетает элементы обзора с результатами оригинальных исследований, состоит в изложении основных идей некоторых работ, связанных с «квазичаплыгинскими» уравнениями и спектром их приложений. Особое внимание уделено задачам, связанным с динамикой электронных потоков. Эти задачи могут, в частности, представить интерес для понимания турбулентности в потоках электронов. Частью общей цели было сравнение результатов решения электронных задач на основе «квазичаплыгинских» уравнений с традиционными подходами, основанными на методах теории плазмы и сверхвысокочастотной электроники.

Во Вводной части работы приводится вывод этих малоизвестных в радиофизике уравнений Чаплыгина, имеющих широкий спектр приложений в различных областях науки для описания неустойчивых сред [1]-[3].

В 1903 году академик Сергей Алексеевич Чаплыгин защитил докторскую диссертацию «О газовых струях», в которой, в частности, он исследовал газ, впоследствии названный «газом Чаплыгина», который обладал необычными свойствами, например отрицательным показателем адиабаты $\gamma = -1$. Уравнение состояния этого газа:

$$p = \frac{p_0 \rho_0}{\rho},$$

где p, ρ – давление и плотность газа, индекс «0» соответствует невозмущённым значениям. Очевидно, что газ, расширение которого ведёт

не к падению давления, а к его увеличению ($p\rho=const$), неустойчив и не существует в реальной природе. Но нелинейные уравнения, описывающие его, допускают возможность точного решения, а такая модель с рядом различных модификаций оказалась очень полезной при изучении многих «квазичаплыгинских» неустойчивых сред. В связи с этим квазичаплыгинские уравнения и представляют большой интерес (их вывод и основные свойства представлены во Вводной части работы). Уравнения имеют вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla\right)\frac{\rho}{\rho_0} = -\rho * \operatorname{div} \vec{v}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla\right)\vec{v} = mc_0^2\nabla\left(\frac{1}{\rho_* - \frac{1}{m}}\right), \quad (2)$$

где p – давление, ρ , ρ_0 – переменная и постоянная составляющая плотности среды; \vec{v} – скорость, $c_0 = \frac{p_0}{\rho_0}$, p_0 – невозмущённое давление, $\rho * = \frac{\rho}{\rho_0}$ – безразмерная приведённая плотность (отнесённая к невозмущённой), $m = -\frac{1}{2}$ – азимутальное число. Это число является параметром, по которому становится возможным классифицировать квазичаплыгинские среды. Оно фигурирует в уравнении Лапласа $\Delta\Phi = 0$ для «электростатического потенциала» $\Phi \sim \cos(m\varphi)$. Следует отметить, что в природе встречаются квазичаплыгинские среды только с целым, либо с полуцелым значением азимутального числа и, более того, встречаются лишь шесть его значений:

$$m = -2, -1, -1/2, 1/2, 1, 3/2.$$

Список пятидесяти неустойчивых сред для разных значений азимутального числа, в которых длинноволновые возмущения описываются квазичаплыгинскими уравнениями [1] и [2], приведены в бакалаврской работе во Вводной части. Из этого списка выделены некоторые плазменные и плазменно – пучковые неустойчивости, вытекающие из уравнений Чаплыгина, которые рассмотрены в основной части работы. Работа состоит из Введения, двух разделов и Приложения.

Основное содержание работы

Первый раздел бакалаврской работы начинается с описания бунемановской неустойчивости, возникающей в результате взаимодействия ионного и электронного потоков. Анализ данного вида неустойчивостей проводится на обычном языке СВЧ – электроники в эйлеровых переменных, чтобы в дальнейшем можно было сравнить этот подход с описанием неустойчивости Бунемана с помощью квазичаплыгинских уравнений.

Основным допущением для каждого частного случая являлось то, что релятивистский электронный пучок движется относительно неподвижных ионов в однородном магнитном поле, причём концентрации ионов и электронов равны, то есть ионы скомпенсировали электронный фон. Для каждой из задач были получены дисперсионные уравнения и бриллюэновские диаграммы.

Для волн пространственного заряда в бесконечно широком электронном потоке дисперсионное уравнение имеет вид:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega - v_{01}k_z)^2}, \quad (3)$$

где ω_p – плазменная частота электронов, v_{01} - скорость электронов, k_z - продольная составляющая волнового вектора, ω - частота возмущения потока.

Бриллюэновская диаграмма для (3) представлена на рис. 1.

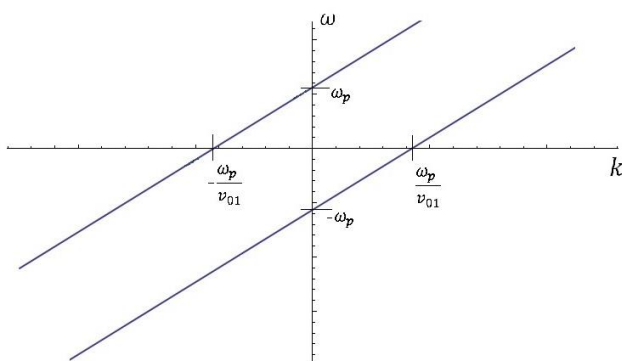


Рис. 1. Бриллюэновская диаграмма для уравнения (3), которая соответствует волнам пространственного заряда в бесконечно широком электронном потоке.

В случае ионно – скомпенсированного потока электронов, когда $k_{\perp} = 0$, а ионы неподвижны, решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$\omega = v_{01}k_z \pm \omega_p \left[1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{v_{01}k_z} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (4)$$

где $\vec{k}(k_{\perp}, k_z)$ - волновое число, k_{\perp} - поперечная составляющая z , равная нулю, ω_{pi} – плазменная частота ионов.

В данном случае при $|v_{01}k_z| < \omega_{pi}$ – частота ω будет комплексной. Поэтому графики для $\omega(k_z)$ будут иметь как реальную, так и мнимую части:

$$\omega = Re \omega + j Im \omega = v_{01}k_z \pm j \left[\left(\frac{\omega_{pi}}{v_{01}k_z} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2}$$

Зависимости для $\omega(k_z)$, полученные в системе Wolfram Alpha, представлены ниже на рисунках 2 – 5.

Диаграммы Бриллюэна имеют следующий вид для $\omega = v_{01}k_z + \omega_p \left[1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{v_{01}k_z} \right)^2 \right]^{-1/2}$ (4')

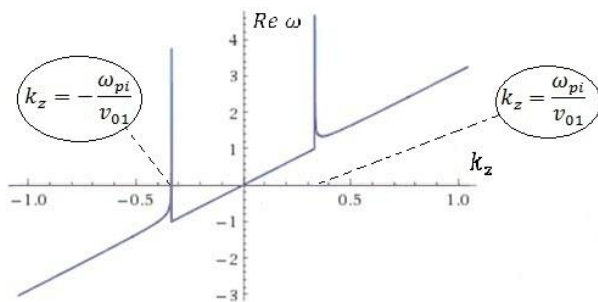


Рис. 2. Реальная часть (4').

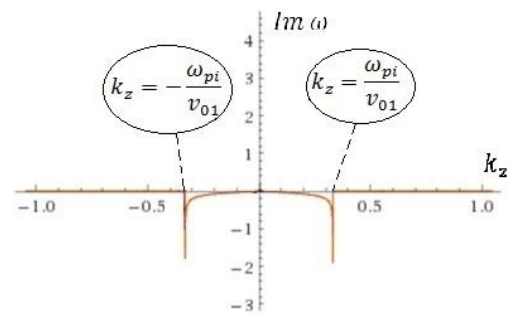


Рис. 3. Мнимая часть (4').

Имеем рисунки 4 и 5 аналогично для

$$\omega = v_{01}k_z - \omega_p \left[1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{v_{01}k_z} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4'')$$

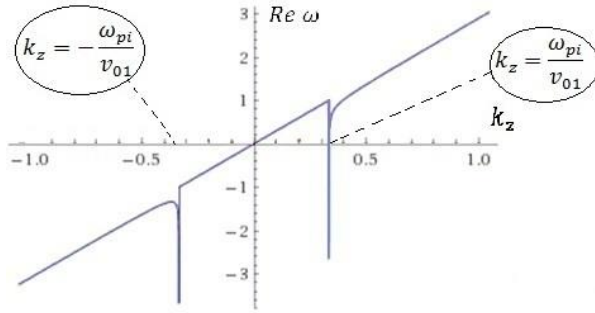


Рис. 4. Реальная часть (4'').

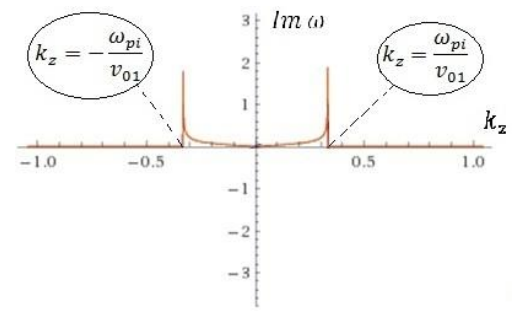


Рис. 5. Мнимая часть (4'').

В более общем случае, когда $k_{\perp} \neq 0$, дисперсионное уравнение записывается следующим образом:

$$k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z v_{01})^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 \right] + k_{\perp}^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 \right) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) есть не что иное, как уравнение Бунемана.

Неустойчивые решения уравнения (5) лежат в области $\omega \approx k_z v_{01}$. Записывая величину ω вблизи $k_z v_{01}$ как $\omega \approx k_z v_{01} + \delta_0$, где δ_0 - малый по величине инкремент, и подставляя выражение для ω в уравнение (5), получаем

$$\delta_0^2 = \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \omega_p^2 \left[1 - \frac{\omega_{pi}^2}{(k_z v_{01})^2} \right]^{-1}.$$

Неустойчивые колебания, соответствующие $\delta_0^2 < 0$, возникают если

$$\omega_{pi}^2 > k_z^2 v_{01}^2.$$

Этот тип неустойчивостей принято называть *бунемановским* [2], [5], [6].

Далее в работе показан ещё один способ описания бунемановской неустойчивости, связанный с отысканием порога неустойчивости. Берётся та же исходная модель, что и ранее: однородная плазма, в которой ионы неподвижны, а электроны движутся относительно их со скоростью v_0 .

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m}{M\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right],$$

где m - масса электронов, а M - масса ионов.

Рассматривается случай $\omega_j = \text{Re } \omega_j + j \text{Im } \omega_j$.

Пусть $x = \frac{\omega}{\omega_p}$, $y = \frac{kv_0}{\omega_p}$, тогда

$$-1 + \omega_p^2 \left[\frac{m}{Mx^2} + \frac{1}{(x - y)^2} \right] = F(x, y).$$

Для фиксированного y (взято значение $y = 3$ для наглядности) построена функция $F(x, y)$, на которой видно, что она имеет сингулярности при $x = 0$, $y = x$. Пересечения этой кривой с $F(x, y)$ дают значения x , которые удовлетворяют дисперсионному уравнению. При уменьшении значения y (рис. 7) имеются лишь две точки пересечения (отмечены на графике стрелочками), то есть два вещественных корня. Другие два должны быть комплексными, и один из них приведёт к неустойчивости.

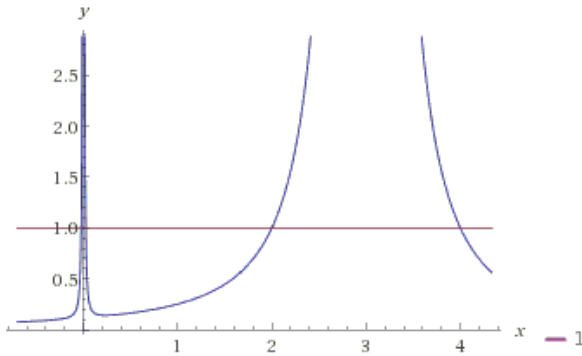


Рис. 6. Функция $F(x, y)$ при $y = 3$.

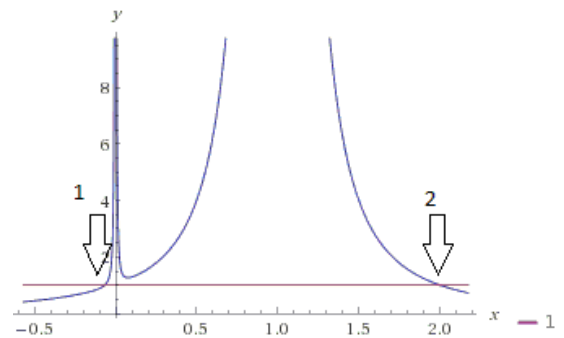


Рис. 7. Функция $F(x, y)$ при уменьшении значения y .

Для порога неустойчивости:

$$\omega = \frac{kv_0}{1 + \left(\frac{M}{m}\right)^{1/3}} \approx kv_0 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}.$$

Неустойчивость выражается в раскачке колебаний, в которой участвуют как электроны, так и ионы среды. Неустойчивость замечательна тем, что две столь различные компоненты, как лёгкие электроны пучка с относительно высокой частотой ω_p и тяжёлые ионы среды с много меньшей собственной частотой $\omega_i = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \omega_p$, весьма эффективно (резонансно) взаимодействуют между собой.

Далее в **Разделе 1** бакалаврской работы представлен ещё один способ описания бунемановской неустойчивости, в котором рассуждения исходили из того, что неустойчивость Бунемана возникает при больших скоростях электронов (больших электронных токах) и представляет собой раскачку связанных друг с другом колебаний плотности заряда электронов и ионов. В плазме возможны два типа колебаний плотности заряда:

быстрые электронные $\omega \geq \omega_p$ и

медленные ионные $\omega < \omega_{pi}$.

Если направленная скорость электронов достаточно велика, то в результате доплеровского сдвига частоты возможно пересечение этих двух ветвей колебаний. При этом медленные ионные колебания $\omega \sim \omega_{pi}$ в системе отсчёта, движущейся вместе с электронным потоком, попадают в резонанс с быстрыми колебаниями электронной плотности $|\omega - kv_0| \sim \omega_p$. Возникает неустойчивость, которой соответствует дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} = \varepsilon(\omega, k) = 0, \quad (6)$$

Пусть $\omega \ll kv_0$, а также $k = \frac{\omega_p}{v_0}$. Тогда второе слагаемое можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь двумя членами разложения, что даёт:

$$\frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} \approx \frac{\omega_p^2}{(kv_0)^2} + \frac{2\omega_p^2\omega}{(kv_0)^3}.$$

Подставив это разложение в уравнение (6), получили уравнение:

$$-\frac{\omega_{pi}\omega_p}{2} = \omega^3.$$

Это кубическое уравнение имеет комплексный корень $\omega = \omega' + j\gamma$ с положительной мнимой частью, что соответствует росту амплитуды со временем $E \sim e^{\gamma t}$. Способ отыскания значения γ и все математические преобразования показаны в работе подробно.

Особенно интересным способом трактовка этого вида неустойчивости является четвёртый способ, основанный на концепции возбуждения медленной волны пространственного заряда (МВПЗ) – волны с отрицательной энергией, которая уменьшает энергию системы среда – волна. Ускорение ионов действует как механизм диссипации и также приводит к дальнейшему уменьшению энергии системы, то есть к росту амплитуды МВПЗ, а, следовательно, к неустойчивости.

Далее изложен анализ бунемановской неустойчивости с использованием «квазичаплыгинских» уравнений, и повторены численные расчеты из [2]. Главное достоинство этого подхода в том, что он позволил рассмотреть нелинейную неустойчивость, а не только условия её возникновения.

В одномерном приближении получена квазичаплыгинская система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_* v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{2} c_0^2 \frac{\partial \rho_*^{-2}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (7)$$

для которой в работе представлены решения из работы [2] и получен график для них (рис. 8).

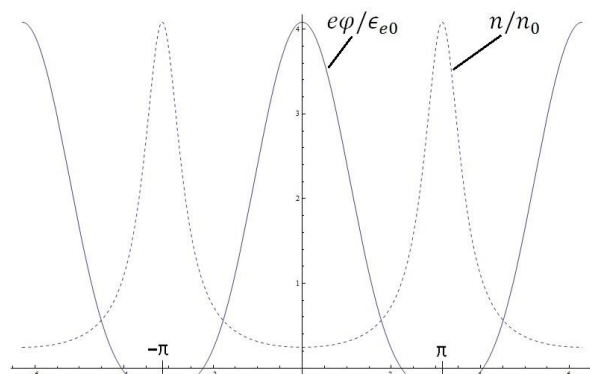


Рис. 8. График нарастающих возмущений потенциала ($e\varphi/\epsilon_{e0}$) и плотности плазмы (n/n_0) при развитии бунемановской неустойчивости.

Видно, как происходят периодические нарастания возмущений потенциала и плотности, которые находятся в противофазе друг относительно друга. Таким образом, использование «квазичаплыгинских» уравнений позволяет рассмотреть нелинейную стадию неустойчивости, а не только условия её возникновения.

Во втором разделе работы рассматриваются такие виды неустойчивостей, как разбиение электронного пучка в плазме на сгустки, слои и нити (филаменты). Этот раздел, как и вторая часть Введения, носит обзорный характер, то есть в нём рассматриваются уже полученные результаты из работ [1]-[4]. Эти виды неустойчивостей классифицируются, как «капли на потолке». Класс этих явлений получил такое название в связи с простейшим примером для него – слой жидкости на потолке. Если, к примеру, разлить воду на плоский пол в квартире, и если длина волны λ велика по сравнению с глубиной слоя H , тогда скорость распространения этой волны будет равна $c_0 = \sqrt{|g|H}$, где g – ускорение силы тяжести. Затем заморозим данный слой и «перевернём» дом. Тогда этот замороженный плоский слой окажется на потолке. Теперь представим, что его возможно мгновенно нагреть. Очевидно, что такой слой не сможет сразу обрушиться вниз под действием силы тяжести из – за наличия атмосферного давления (около 1кг/см^2). В данном случае уравнения движения воды в слое останутся

прежними, с одной лишь существенной разницей, что скорость движения волны по правилу перехода $c_0 = \sqrt{|g|H} \rightarrow i\sqrt{|g|H}$ станет мнимой. Это будет означать переход устойчивой среды в неустойчивую. Слой начнёт собираться в капли и струи, падающие вниз, то есть перпендикулярно слою начнут нарастать стоящие на месте возмущения квазичаплыгинского типа, которые, в конце концов, заставят постепенно обрушиться вниз всю воду.

В работе [1] представлены графики для этой ситуации (рис. 9). Эти три варианта – результат аналитического решения уравнений «квазичаплыгинского» типа. Слой характеризуем относительной толщиной h/h_0 в данной точке потолка (h_0 – первоначальная толщина).

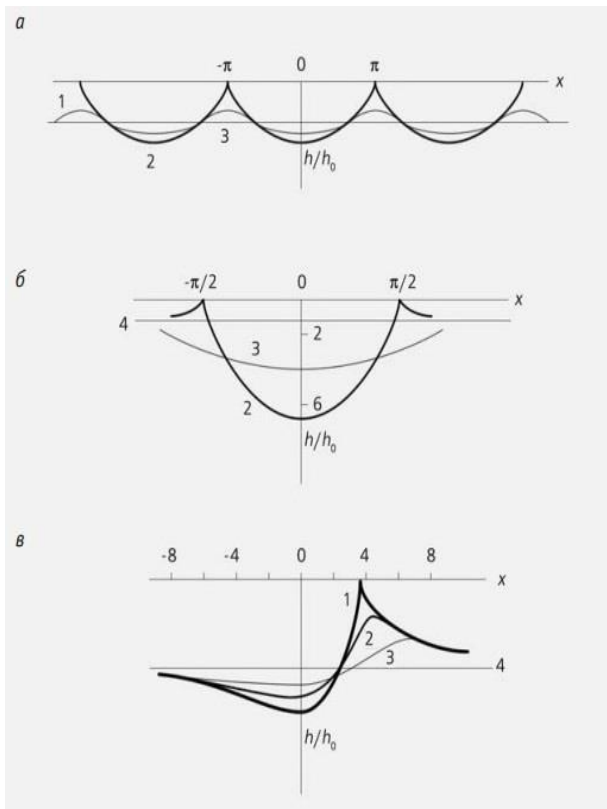


Рис. 9. Три типа точных решений для «капель на потолке» [1], [2], описывающие разные варианты эволюции слоя воды. В варианте (а) необходимо внешнее воздействие, так как периодические по координате x нарастающие во времени капли не могут возникнуть случайно. Вариант (б) – нарастание во времени одиночной капли с осевой симметрией, которую очевидно может тоже обусловить только внешнее воздействие. Поэтому наиболее типичным можно считать только вариант (в), несимметричную каплю, нарастающую во времени, вплоть до полного обрыва слоя в момент времени 1.

Задача описания группировки и филаментации электронов важна, например, при создании и использовании некоторых приборов СВЧ диапазона. В работах [2], [3] дана теория разбиения электронного пучка на сгустки в плазме. Проведён обзор результатов, полученных в этих работах и представлен некоторый графический материал. Зависимости скорости и

концентрации пучка от координат и времени, соответствующие возникновению разрыва, а также профили скоростей и плотности частиц плотного и редкого пучков в плазме, как результат описания этого типа неустойчивостей на языке квазичаплыгинских уравнений.

В Приложении кратко изложены биографии Сергея Алексеевича Чаплыгина, Оскара Бунемана и Джона Робинсона Пирса, чьи статьи использованы при написании работы.

Заключение

Остановимся кратко на основных результатах бакалаврской работы.

1. Работа носит частично обзорный характер, а также содержит изложение оригинальных результатов исследования некоторых видов неустойчивости электронных потоков, которые могут быть полезны для понимания турбулизации электронных пучков.

2. Во вводной части работы излагается малоизвестная в радиофизике теория так называемых «квазичаплыгинских» уравнений, имеющих широкий спектр приложений в различных областях науки для описания неустойчивых сред. Приводится вывод уравнений для газа Чаплыгина и обсуждены его свойства. Приведена таблица физических сред, описываемых уравнениями Чаплыгина, из которой выделены три типа неустойчивости, связанные с эволюцией электронных потоков.

3. В разделе 1 рассмотрена бунемановская неустойчивость, возникающая при взаимодействии электронного и ионного потоков. Изложение основано на сравнении подходов к исследованию этой неустойчивости на основе трактовок, традиционных для физики плазмы и СВЧ электроники. В более общем виде, чем обычно, получено дисперсионное уравнение задачи, проведён его анализ, рассмотрен ряд частных случаев, совпадающих, с известными моделями. Во всех случаях установлены условия возникновения неустойчивости и приведены результаты расчёта диаграммы Бриллюэна, а также приближённые аналитические оценки. Подробно описаны различные качественные объяснения физической картины возникновения неустойчивости. Наиболее интересной представляется трактовка, основанная на концепции возбуждения медленной волны пространственного заряда (МВПЗ) – волны с отрицательной энергией, которая уменьшает энергию системы среда – волна. Ускорение ионов действует как механизм диссипации и

также приводит к дальнейшему уменьшению энергии системы, то есть к росту амплитуды МВПЗ, а, следовательно, к неустойчивости.

Изложен анализ бунемановской неустойчивости с использованием «квазичаплыгинских» уравнений, и повторены численные расчеты из [2]. Главное достоинство этого подхода в том, что он позволил рассмотреть нелинейную неустойчивость, а не только условия её возникновения.

4. Раздел 2 также как и вторая часть Введения носит обзорный характер. В ней рассмотрена изящная аналогия неустойчивости, известной как «капли на потолке», с неустойчивостью, приводящей к разбиению пучка в плазме на сгустки. Подробно обсуждена задача о группировании и филаментаризации электронов в плазме. Приведено много графического материала. Изложена также теория разбиения пучка в плазме на слои и нити на языке квазичаплыгинских уравнений.

5. В Приложении кратко изложены биографии Сергея Алексеевича Чаплыгина, Оскара Бунемана и Джона Робинсона Пирса, чьи статьи использованы при написании бакалаврской работы.

Список использованных источников

1. Б.А. Трубников. Самоорганизация неустойчивых сред // Природа, 2007, №4, с. 68-73.
2. С.К. Жданов, Б. А. Трубников. Квазигазовые неустойчивые среды. Наука, 1991.
3. С.В. Буланов, П. В. Сасоров. Точная нелинейная теория распада электронного пучка на отдельные сгустки в плазме// ЖЭТФ, 1984, т. 86, вып. 2, с. 479 – 482.
4. Л.С. Буланов, А. А. Рухадзе. Устойчивость релятивистских электронных пучков в плазме и проблема критических токов// УФН, 1971, т. 103, с. 609 – 640.
5. А.Б. Михайловский. Неустойчивости однородной плазмы. М.: Атомиздат, 1975.
6. Р. Миллер. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
7. А.А. Рухадзе, Л.С. Богданкевич, С.Е. Росинский, В.Г. Рухлин. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
8. Pierce J.R. Possible fluctuations in electron streams due by ions, J. Appl. Phys., 1948, v.19, p.231.