

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

**Формирование инвестиционного портфеля с ограничением на
кардинальность**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 5 курса 521 группы

направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Пайкова Андрея Юрьевича

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

подпись, дата

И. Д. Сагаева

Зав. кафедрой:

к. ф.-м. н., доцент

подпись, дата

Л. Б. Тяпаев

Саратов 2019

Введение. Инвестор во все времена сталкивался с проблемой поиска оптимальных инструментов для инвестирования. Подбор эффективных инструментов для инвестирования требует от инвестора учесть большое количество факторов.

Современные теории финансовой математики и экономического анализа предоставляют широкий выбор методов формирования эффективных наборов активов, так называемых портфелей. Как правило портфель состоит из активов с разной степенью доходности, ликвидности и срока действия. Существующие методы позволяют инвестору подобрать портфель с максимальной доходностью, учитывая ограничения на риск или минимизировать риск с заданной доходностью. На первый взгляд, потенциальному инвестору достаточно выбрать портфель с наименьшим риском и максимальной доходностью, но в текущих рыночных реалиях формирование эффективного портфеля, только по этим двум параметрам, является недостаточным.

Финансовый рынок представляет собой мощный механизм, который предоставляет доступ к купле-продаже широкого ассортимента разнообразных активов. Обычно, теоретические модели предполагают, что инвестиционный портфель может содержать сколь угодно большое количество активов, но на практике это не так. На число активов накладывается ограничение – кардинальность числа активов. Для решения задач по поиску оптимальных активов для портфеля применяются эвристики, т.е. упрощенные методы. Примером такого метода является генетический алгоритм.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в исследовании проблемы подбора структуры оптимального инвестиционного портфеля с наименьшим риском, заданной ожидаемой доходностью и ограничением на кардинальность числа активов.

Для достижения цели были выделены следующие подзадачи:

- Определение основных понятий доходности финансовых активов.
- Изучение основных теорий портфельного инвестирования.
- Определение операторов для генетического алгоритма.

- Рассмотрение теорий портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность числа активов.
- Разработка программы для подбора оптимального инвестиционного портфеля с использованием методов Марковица, Тобина, Шарпа и ограничением на кардинальность числа активов.

В первой главе рассматриваются основные понятия касающиеся инвестирования. Дается характеристика видам ценных бумаг.

Во второй главе дается определение инвестиционному портфелю. Описаны основные теоретические модели формирования эффективных инвестиционных портфелей.

В третьей главе поясняется задача на ограничение количества активов в портфеле.

Четвертая глава описывает основные принципы работы генетического алгоритма.

В пятой главе рассматривается возможность применения генетического алгоритма к поиску эффективного портфеля с ограничением на кардинальность.

Шестая глава описывает структуру программы, которая была создана для решения задач по поискам оптимальных портфелей с ограничением на кардинальность.

Седьмая глава описывает проводимые эксперименты с помощью созданной программы.

В заключении подводятся итоги проделанной работы, приводятся выводы основанные на проводимых экспериментах.

1 Общие понятия. Инвестирование - размещение любого инвестиционного капитала с целью получения прибыли.

Основные критерии инвестирования:

- Приемлемые риски – это риски, связанные с вероятностью полной или частичной потери инвестированного капитала. Наименее подверженные рискам инструменты отличаются, как правило, не высоким уровнем

дохода. Надежными активами считаются акции крупных компаний, государственные облигации, банковские депозиты.

- Доходность – показатель эффективности вложений, по которому можно оценивать прибыльность инвестирования. Высокодоходные активы зачастую являются самыми рискованными.
- Ликвидность – это свойство актива, зависящее от скорости обращения актива обратно в денежные или финансовые ресурсы.

Ценная бумага- финансовый инструмент, включающий в себя совокупность прав на ресурсы, обособившиеся от своей материальной основы и в некоторых случаях имеющие собственную материальную форму, имеющие возможность самостоятельного обращения на финансовом рынке.

Доходность ценной бумаги, как правило, определяется за период владения. Доходность r определяется по формуле:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

где P_0 -цена акции в начале периода, P_1 -цена акции в конце периода.

Инвестиционным портфелем называют набор реальных или финансовых инвестиций. Инвестирование средств в любой актив сопровождается риском полной или частичной потери инвестиций. Ключевой особенностью формирования портфеля является диверсификация инвестиций в различные активы с целью снижения риска.

Ожидаемая доходность портфеля, с учетом правил вычисления математического ожидания, равна:

$$\bar{m}_p = E[r_p] = E\left[\sum_{i=1}^n x_i r_i\right] = \sum_{i=1}^n E[x_i r_i] = \sum_{i=1}^n x_i E[r_i] = \sum_{i=1}^n x_i \bar{m}_i$$

Дисперсию портфеля определяет математическое ожидание квадрата этого отклонения:

$$V_p = E[(r_p - \bar{m}_p)^2] = E\left[\sum_{i=1}^n x_i(r_i - \bar{m}_i) \sum_{j=1}^n x_j(r_j - \bar{m}_j)\right] =$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (r_i - \bar{m}_i)(r_j - \bar{m}_j)\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij}$$

2 Модели оптимального портфельного инвестирования Для формирования портфеля по модели Марковица задача выбора оптимальной структуры рискованного портфеля формулируется следующим образом: найти вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} x_i x_j,$$

при ограничениях

$$\bar{m}_p = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Модель Тобина предполагает наличие в портфеле безрискового актива (x_0), его гарантированная доходность составит r_0 . Для подбора портфеля необходимо найти вектор X , который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = X^T V X$$

и удовлетворяет

$$m^T X + r_0 x_0 = \bar{m}_p, \quad I^T X + x_0 = 1$$

3 Задача оптимального портфельного инвестирования с ограничением на cardinality Обычно рынок предлагает огромное количество активов, при этом на число активов портфеля накладывается ограничение - cardinality числа активов. Рассмотренные ранее модели можно дополнить ограничением на cardinality.

Для модели Марковица необходимо найти вектор долей X , который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^N \bar{m}_i = \bar{m}_p, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \delta_i = K$$

Для модели Тобина требуется найти вектор долей X , который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^N \bar{m}_i x_i + r_0 x_0 = \bar{m}_p, \quad \sum_{i=1}^N x_i + x_0 = 1, \quad \sum_{i=1}^N \delta_i = K$$

Для модели Тобина требуется найти вектор долей X , который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = \left[\sum_{j=1}^N x_j \beta_j \right]^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^N x_j \bar{m}_j = m_p, \quad \sum_{i=1}^N x_j = 1, \quad \sum_{i=1}^N \delta_i = K$$

4 Генетические алгоритмы Генетические алгоритмы представляют собой адаптивные методы поиска, которые, как правило, используются для решения задач оптимизации. Они являются поисковыми механизмами, основанными на эволюционных принципах естественного отбора и генетики. Генетический алгоритм использует механизмы естественной эволюции, основанные на трех принципах: фитнес-функция, скрещивание и мутация.

Основными генетическими операторами в алгоритме являются:

- *Отбор* – это первая генетическая операция, осуществляемая над популяцией. В результате селекции должны быть отобраны хромосомы,

которые будут участвовать в процессе генерации новой популяции (популяции потомков). Селекция происходит на основании оценок пригодности хромосом. В итоге возникает промежуточная популяция.

- *Скращивание* выполняется в целях комбинирования и смешения признаков родительской популяции в популяции потомков.
- *Мутация* небольшого количества генов в популяции потомков призвана сообщить потомкам новые признаки, которые могли отсутствовать в родительской популяции[9].

5 Генетический алгоритм для решения задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования, которая является NP-полной.

Обозначим через $P_{min}(\delta)$ минимальное значение целевой функции одной из вышеприведенных задач в оптимальной точке допустимого множества, определяемого ограничениями.

Возьмем $\bar{m}_p \in [\bar{m}_{min}, \bar{m}_{max}]$, где \bar{m}_{min} - минимальное, а \bar{m}_{max} - максимальное значение ожидаемых доходностей активов. Работа генетического алгоритма состоит в выполнении следующих шагов:

1. Кодирование. Используется двоичное кодирование. Популяция имеет фиксированный размер $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) являются наборы $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Delta_n(K)$, т.е. портфель состоит из n генов, каждый из которых представим битом. Если он равен единице, то актив, соответствующий номеру бита, присутствует в портфеле, в противном случае - отсутствует. В портфеле ровно K рискованных активов.

2. Генерация начальной популяции. Она происходит путем генерации P элементов случайным образом. Для гарантированного решения задачи $P(\delta)$ необходимо, чтобы портфель включал в себя часть активов, имеющих доходность, более высокую, чем \overline{m}_p , так и часть активов с доходностью меньшей, чем \overline{m}_p .

3. Отбор. Используется отбор на основе усечения. Для каждого элемента δ текущей i -ой популяции решается оптимизационная задача $P(\delta)$ и находится соответствующее значение $P_{min}(\delta)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые $2s$ элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т.е. выбираются $2s \ll P$ элементов текущей i -й популяции с наименьшим значением $P_{min}(\delta)$. Через A_i обозначается множество особей, полученных в результате отбора на шаге i . После чего с помощью панмиксии (случайным образом) отбираются s элементов множества A_i . Полученное множество обозначается через $A_{1,i}$. Множество остальных элементов обозначается через $A_{2,i}$.

4. Скрещивание. Используется особый оператор скрещивания, при котором каждой паре элементов (ε, δ) , $\varepsilon \in A_{1,i}$, $\delta \in A_{2,i}$, ставится в соответствие элемент (потомок) по следующим правилам:

- если $\varepsilon_j = 1$ и $\delta_j = 1$, то $\gamma_j = 1$, $(1 \leq j \leq n)$. То есть, если актив присутствует в обоих родительских портфелях, то он присутствует и в потомке;
- если $\varepsilon_j = 0$ и $\delta_j = 0$, то $\gamma_j = 0$, $(1 \leq j \leq n)$, то .То есть, если актив отсутствует в обоих родительских портфелях, то он отсутствует и в потомке;
- если $\varepsilon_j + \delta_j = 1$, $(1 \leq j \leq n)$, т.е актив присутствует только в одном из родительских портфелей, то его присутствие или отсутствие в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы $\sum_{j=1}^N \gamma_j = K$.

В результате скрещивания получают $P = s^2$ потомков, которые потом

полностью заменяют родителей, т.е в алгоритме используется чистая замена.

5. Мутация. Данный оператор является стандартным для генетического алгоритма и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В данном генетическом алгоритме потомок подвергается мутации с вероятностью α посредством случайного выбора одного актива в портфеле- потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле- потомке, а также в родительских портфелях [6].

6 Реализация программы для нахождения оптимального инвестиционного портфеля с ограничением на кардинальность Для решения задачи подбора оптимального инвестиционного портфеля с использованием теоретических моделей была реализована программа. Раздел описывает архитектуру программы, программную реализацию теоретических моделей, интерфейс программы. В ходе работы над программой были программно описаны методы нахождения оптимального инвестиционного портфеля по моделям Марковица, Тобина, Шарпа и генетического алгоритма с ограничением на кардинальность числа активов.

Заключение. Разработанная программа была использована для проведения вычислительных экспериментов. Для эксперимента были взяты акции российских и американских крупных компаний за 2014- 2019 год. В результате можно сделать вывод, что модель Шарпа более предпочтительна, поскольку учитывает влияние рынка на доходность. Программа написана на языке C #, в среде Visual Studio 2013. Для создания графического интерфейса пользователя использовалась среда Windows Forms.

Список использованных источников

1. Электронная экономико-правовая библиотека //Зачетка.рф[Электронный ресурс] . — Режим доступа: <http://xn--80aatn3b3a4e.xn--plai/> (Дата обращения 12.11.2015)
2. Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций: Моография. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2003. 544с.
3. Сидоров, С.П. Модели оптимального портфельного инвестирования: учеб.-метод. пособие для студентов механико-математического факультета. / С.П.Сидоров, Е.А.Захарова, А.А.Хомченко, Н.П.Гришина. Саратов: Издательство Сарат. ун-та, 2015. 77 с. ил.
4. Риски инвестирования // Справочник для экономистов[Электронный ресурс]. – Электрон. журн. – 2012 — Режим доступа: <http://www.catback.ru/articles/theory/invest/risk.htm> (Дата обращения 20.02.2016)
5. Шарп, У. Инвестиции: пер. с англ./ У. Шарп, Г.Александр, Дж. Бэйли; пер. А.Н. Буренина, А.А. Васина. М.: ИНФРА-М, 2001. 1028с.
6. Максимова, В.Ф. Инвестиционный менеджмент: Учебно-практическое пособие. М. : Изд. Центр ЕАОИ, 2007. 214 с.
7. Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: Учебное пособие. М.: Финакадемия, 2008. 192 с.
8. Goldberg, D. E. // Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. New-York: Addison Wesley, 1989.
9. Бураков, М.В. // Генетический алгоритм[Электронный ресурс]. – 2008