МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Использование мультипликативного преобразования Фурье для сжатия информации

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 «Прикладная информатика»
механико-математического факультета
Кузнецовой Марии Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. наук ____________ Волосивец С.С.

Зав. кафедрой
доцент, д.ф.-м. наук ____________ Сидоров С.П.

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день существует множество применений преобразований Фурье на практике [1–4]. Во всех рассмотренных случаях сначала выполняется подсчет спектральных характеристик, затем над ними производятся какие-либо преобразования. На выход подаются данные, восстановленные по измененному спектру. Эффективность алгоритмов, применяемых для решения определенной задачи, зависит от используемых систем базисных функций: для отдельного типа данных одна система может оказаться предпочтительнее другой. Таким образом, поиск и исследование систем базисных функций продолжает оставаться актульным. Объектом изучения в выпускной работе является дискретное преобразование Фурье по системе ВПФ (функций Виленкина-Прайса).

Целью работы является применения дискретного преобразования Фурье по системе ВПФ для сжатия данных. Для ее достижения решены следующие задачи: изучение теоретических свойств дискретного преобразования Фурье по системе ВПФ; разработка алгоритма БПФ (быстрого преобразования Фурье); выбор способа сжатия и исследование его оптимальности; реализация выбранного способа сжатия. Основная часть работы состоит из четырех разделов: "Свойства коэффициентов Фурье интегрируемых функций", "Дискретные преобразования по ВПФ", "Алгоритм быстрого преобразования Фурье" и "Зонное сжатие данных."

Основными теоретическими результатами являются теоремы 1–3, которые до этого были доказаны в [4, 5] только в случае ВКФ (функций Виленкина-Крестенсона). Необходимым и достаточным условием, которое накладывается на систему, является условие (2) палиндромности порождающей последовательности. Таким образом, удалось расширить класс функций, для которых верны эти теоремы. Эти результаты не только являются новыми, но и допускают практическое применение.

Одно из таких применений — зонное сжатие данных. Этот способ подразумевает, что хранятся не сами данные, а их вектор спектральных характеристик. Для сокращения хранимого объема обнулятся подотрезок, содержащий целое число пачек и подпачек вектора спектральных характеристик [5]. Доказано, что минимальная гарантированная оценка погрешности восстановления будет, если удалить несколько центральных подпачек последней пачки при одном и том же коэффициенте сжатия. Чтобы применить этот результат к актуальной задаче сжатия изображения, можно сканировать его в одномерный массив и удалять подотрезок, назовем это одномерным сжатием. Второй подход двумерного сжатия состоит в том, что вычисляется двумерное преобразование Фурье изображения и удаляется прямоугольник коэффициентов, чьи первые и вторые координаты одновременно принадлежат центральным подпачкам последних пачек по соответствующим измерениям.

Для подсчета коэффициентов Фурье входных данных большого объема на практике требуется БПФ. Этот алгоритм в рекурсивном стиле разработан для произвольных систем ВПФ. Отметим, что большинство авторов ограничиваются рассмотрением БПФ для систем Хаара, ВКФ и экспонент [4, 9]. С. Ф. Лукомский [10] доказал возможность разработки данного алгоритма для произвольной системы ВПФ, однако приведенные формулы требуют решения системы с матрицей Вандермонда на каждом шаге и не могут быть использованы для эффективной реализации. Таким образом, данный результат также является новым.

Алгоритм БПФ и программа, выполняющая зонное сжатие изображений, были реализованы на языке Java с многопоточными вычислениями. Данный язык программирования был выбран с учетом того, что он обладает средствами работы с изображениями и потоками.

По результатам выпускной работы опубликованы статьи [6–8]. Также они были представлены на VII международной молодежной научно-практической конференции “Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками” и студенческой научной конференции “Математика. Механика”.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Назовем порождающей последовательностью $P^n = \{p_j\}_{j=1}^n$, в которой $2 \leqslant p_j$ при всех $j = \overline{1,n}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_j = p_1 \dots p_j$, $Z_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Числа $x = l/m_n$ при $l \in \mathbb{Z} \cap [0, m_n)$ и $k \in \mathbb{Z} \cap [0, m_n)$ имеют единственные разложения

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j^{-1},\ x_j \in Z_j; \quad k = \sum_{j=1}^{n} k_j m_{j-1},\ k_j \in Z_j. \tag{1}$$

Для таких $0 \leqslant k, j < m_n$, $x = j/m_n$ можно записать

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Дискретной системой ВПФ (функций Виленкина-Прайса) будем называть множество векторов $\{\chi_k\}_{k=0}^{N-1}$, где j-я компонента вектора χ_k равна $\chi_k(j/N)$, $j = 0, \overline{N-1}$. Она является ортогональным базисом. В дальнейшем предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие палиндромности. Для членов последовательности P^n выполнено

$$p_j = p_{n-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots n. \tag{2}$$

Если $p_j = p\ \forall j$, получим систему ВКФ (функций Виленкина-Крестенсона). Если же в ВКФ $p = 2$, то получим систему Уолша. Она и ее применения наиболее хорошо исследованы.

Пусть дан вектор $f = (f_l)_{l=0}^{m_n-1}$ с комплексными коэффициентами $f_l = f(l/N)$. Введем матрицу

$$B = \frac{1}{N}(\overline{\chi}_k(j/N))_{k,j=0}^{N-1}.$$

Обозначим $\hat{f} = (\hat{f}(0), \hat{f}(1) \dots, \hat{f}(N-1))^T$. Тогда дискретное преобразование Фурье записывается как $\hat{f} = Bf$, а обратное ему — как $f = A\hat{f}$, где $A = B^{-1} = NB^*$, символ $*$ обозначает эрмитово сопряжение.

Введем для $s < n$ преобразование Фурье вектора длины m_s:

$$g = (g_j)_{j=0}^{m_s-1}, \quad B_s = 1/m_s(\chi_k(l/m_s))_{k,l=0}^{m_s-1}, \quad \widehat{g} = B_s g.$$

Отметим, с помощью каких естественных операций растяжения и удлинения из g может быть получен вектор длины $N = m_n$:

1. Растяжение 1-го типа: $f = S1(g), \quad f_j = g_{[j/m_{n-s}]}$;

2. Растяжение 2-го типа: $f = S2(g), \quad f_j = \begin{cases} g_k, & j = km_{n-s}, \\ 0, & \forall k \; j \neq km_{n-s}; \end{cases}$

3. Удлинение 1-го типа: $f = L1(g), \quad f_j = \begin{cases} g_j, & j < m_s, \\ 0, & j \geqslant m_s; \end{cases}$

4. Удлинение 2-го типа: $f = L2(g), \quad f_j = g_{j \bmod m_s}$.

Теорема 1. *Пусть f и g — векторы длины m_n и m_s соответственно, P^n удовлетворяет условию палиндромности. Предположим, что f получен из g с помощью одной из операций растяжения, или f получен из g с помощью одной из операций удлинения и при этом P^s является палиндромом. Тогда $\widehat{f}$ также может быть получен из $\widehat{g}$ с помощью одной из операций растяжения/удлинения в соответствие с таблицей 1:*

Таблица 1 — Взаимосвязь между изменениями исходного вектора и его вектора спектральных характеристик

	f	$\widehat{f}$
1	$S1(g)$	$L1(\widehat{g})$
2	$S2(g)$	$L2(\widehat{g})/m_{n-s}$
3	$L1(g)$	$S1(\widehat{g})/m_{n-s}$
4	$L2(g)$	$S2(\widehat{g})$

Пусть вектор $y = (y_l)_{l=0}^{m_n-1}$, а целые числа k, j удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant k < n$, $0 < j < p_{k+1}$. Здесь и в дальнейшем коэффициенты векторов нумеруются с нуля, а T обозначает транспонирование. Пачкой вектора y с номером k назовем

$$\langle y \rangle^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_k} y_{m_k} \ldots, y_{m_{k+1}-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_n - m_{k+1}})^T.$$

Подпачкой с номером j пачки k данного вектора назовем

$$\langle y \rangle^{j,k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{jm_k} y_{jm_k} \ldots, y_{(j+1)m_k-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_n-(j+1)m_k})^T.$$

Теорема 2. *Пусть $M = \max\limits_{0<j<m_n} |y_j - y_{j-1}|$, P^n удовлетворяет условию палиндрома. Тогда*

$$\|\langle y \rangle^{j,s}\| \leqslant Mm_{n-s-1}/\sin(\pi j/p_{s+1}), \tag{3}$$

$$\|\langle y \rangle^{s}\| \leqslant Mm_{n-s-1}\sqrt{(p_{s+1}-1)^2 + (p_{s+1}^2 - 1)/12}, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|$ — стандартная евклидова норма N-мерного вектора.

Рассмотрим матрицу $(a_{m,\nu})_{m=0,\nu=0}^{m_s-1,m_{n-s}-1}$. Тогда двумерное преобразование Фурье по дискретной системе ВПФ задается формулой

$$\widehat{a}(m,\nu) = \frac{1}{m_s m_{n-s}} \sum_{l=0}^{m_s} \sum_{\nu=0}^{m_{n-s}} a_{l,\nu} \overline{\chi}_\mu \left(\frac{\nu}{m_{n-s}}\right) \overline{\chi}_m \left(\frac{l}{m_s}\right). \tag{5}$$

Теорема 3 устанавливает взаимосвязь между преобразованиями Фурье исходной матрицы и вектора x, полученного из нее построчным сканированием.

Теорема 3. *Пусть* $x = (x_j)_{j=0}^{m_n-1}$, *где*

$$x_{jm_{n-s}+\nu} = a_{j,\nu}, \quad j = 0,1,\dots m_s - 1,\ \nu = 0,1,\dots,m_{n-s}-1. \tag{6}$$

Тогда

$$\widehat{x}(\nu m_s + j) = \widehat{a}(j,\nu),$$

то есть вектор спектральных характеристик $\widehat{x}$ *может быть получен из матрицы спектральных характеристик* $\widehat{a}$ *сканированием по столбцам.*

Теоремы 1–3 могут быть применены на практике при обработке данных. В дальнейшем полученные результаты будут использоваться для зонного сжатия изображений. Ключевым моментом для возможности такого практического применения является алгоритм БПФ (быстрого преобразования Фурье). Он позволяет выполнить преобразование Фурье вектора длиной N за время $O(N\log N)$, что значительно лучше времени $O(N^2)$, достигаемого тривиальным алгоритмом умножения.

Алгоритм 4 (БПФ)**.** Дан вектор $f = (f(k/m_n))_{k=0}^{m_n-1}$ длины $N = m_n$. Для вычисления его преобразования Фурье за $O(N\log N)$ выполняем следующее:

- на шаге с номером h, $h = n, n-1, n-2, \dots, 1$,

  1. Перегруппируем значения $f_k = f(\frac{k}{m_h})$, $0 \leqslant k < m_h$, в векторы g^{k_h}, $0 \leqslant k_h < p_h$, где

     $$g_s^{k_h} = f_{k_h + s * p_h},\ s = \overline{0, m_h - 1}.$$

  2. Выполним преобразование для каждого вектора g^{k_h}, $0 \leqslant k_h < p_h$, с помощью рекурсивного запуска (номер шага $h-1$).

  3. Вычислим коэффициенты по формуле

     $$\hat{f}(j) = \frac{1}{p_h} \sum_{t=0}^{p_h-1} \exp(-2\pi i j_h * t/p_h) \hat{g}^t(s). \tag{7}$$

- на шаге с номером ноль имеется вектор с единственной координатой, которая уже является нулевым коэффициентом Фурье, поэтому вычисления не производятся.

Условие палиндромности при разработке алгоритма не было использовано, однако для простоты будем полагать, что оно выполнено. Тогда обратное преобразование Фурье отличается только тем, что в (7) аргумент экспоненты берется без минуса, и нет множителя $1/p_h$. Описанный алгоритм был реализован на языке Java с использованием многопоточных вычислений.

Перейдем непосредственно к зонному сжатию данных с помощью базисов ВКФ. Подход предполагает вычисление вектора спектральных характеристик и обнуление его подотрезка. Сжатие в объеме достигается за счет отсутствия необходимости в хранении блока нулевых коэффициентов. При постановке задачи Голубовым, Ефимовым и Скворцовым [5] разрешается заменять нулями только целые пачки и подпачки вектора спектральных характеристик, в дальнейшем мы понимаем под зонным сжатием то же. Для восстановления вычисляем обратное преобразование Фурье от измененного вектора спектральных характеристик и отбрасываем мнимые части полученных коэффициентов.

Пусть y — некоторый вектор длины N, и его преобразованием Фурье является $\hat{y} = By$. Если $\tilde{\hat{y}}$ получается из $\hat{y}$ заменой $0 \leqslant k < N$ координат нулями, то коэффициент сжатия Δ равен следующему отношению:

$$\Delta = N/(N-k). \tag{8}$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье вектора $\tilde{\hat{y}}$, обозначив $\tilde{x} = B^{-1}\tilde{\hat{y}}$. Введем также погрешность восстановления

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \|x - \tilde{x}\|_{\text{ср}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |x_j - \tilde{x}_j|^2}.$$

Следуя Голубову, Ефимову и Скворцову, назовем способ сжатия оптимальным, если он гарантирует минимальную $\varepsilon_{\text{ср}}$ при заданной Δ.

Задача. *Найти оптимальный способ зонного сжатия по заданной дискретной системе ВПФ, удовлетворяющей условию* (2), *если можно заменять нулями целые пачки или подпачки.*

Введем $v^{j,s}$ — вектор, восстановленный по $\langle\hat{y}\rangle^{j,s}$, а v^s — вектор, восстановленный по $\langle\hat{y}\rangle^s$. Можно сформулировать следующую лемму:

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы 2, то при всех натуральных $j < p_{s+1}$ справедливы оценки*

$$\max_{x \in \varkappa_N^M} \|v^{j,s}\|_{cp} \leqslant Mm_{n-s-1}/\sin\frac{\pi j}{p_{s+1}}, \tag{9}$$

$$\max_{x \in \varkappa_N^M} \|v^{s}\|_{cp} \leqslant Mm_{n-s-1}\sqrt{(p_{s+1}-1)^2 + \frac{1}{12}(p_{s+1}^2 - 1)}. \tag{10}$$

Заметим, что в силу линейности преобразования Фурье $\|v^{j,s}\|_{\text{ср}}$ как раз является погрешностью восстановления $\varepsilon_{\text{ср}}$ при замене j-й подпачки s-й пачки нулями, а $\|v^s\|_{\text{ср}}$ является погрешностью восстановления при замене нулями целой s-й пачки. Было показано, что правая часть (10) монотонно убывает при возрастании s. Также доказано, что в (9) правая часть при фиксированном s тем меньше, чем ближе j к $[p_{s+1}/2]$; для любой подпачки последней пачки гарантированная оценка меньше, чем для любой подпачки пачки с номером $s < n-1$. Итак, можно предложить 3 оптимальных способа зонного сжатия:

1. Заменить нулями целиком последнюю пачку. Тогда степень сжатия $\Delta = m_n/m_{n-1} = p_n$, а погрешность восстановления

$$\varepsilon_{\text{ср}} \leqslant M\sqrt{(p_n-1)^2 + \frac{1}{12}(p_n^2-1)} \leqslant M\frac{13}{12}p_n.$$

2. Заменить нулями центральную подпачку с номером $p_n/2$ последней пачки (p_n четно). Степень сжатия

$$\Delta = \frac{m_n}{m_n - m_{n-1}} = 1 + \frac{1}{p_n - 1},$$

   а погрешность восстановления $\varepsilon_{\text{ср}}$ меньше M.

3. Заменить нулями $1 < k < p_n - 2$ подряд идущих центральных подпачек последней пачки. Без потери общности считаем, что номера этих пачек $[(p_n-k)/2], \ldots, [(p_n+k)/2]$. Степень сжатия определяется как

$$\Delta = \frac{m_n}{m_n - km_{n-1}} = 1 + \frac{k}{p_n - k}.$$

   Погрешность восстановления в силу линейности преобразования Фурье оценим как $\varepsilon_{\text{ср}} \leqslant M\left(1 + \frac{k}{\sin\frac{\pi}{p_n}\cos\frac{\pi}{p_n}}\right)$.

Отметим, что пункты 1 и 2 могут быть также рассмотрены как обнуление центральных подпачек последней пачки: в первом случае это все подпачки, а во втором — одна.

Так как константа M, равная максимуму двух соседних элементов должна быть малой, было решено взять в качестве входных данных изображения.

Пусть порождающая последовательность P^n, удовлетворяющая условию палиндромности, фиксирована. Мы будем брать изображение с длинами сторон $m_s \times m_{n-s}$. Поскольку каждый пиксель кодируется тремя числами от 0 до 255, алгоритм нужно выполнять для каждого из цветов RGB. Каждый из этих двумерных массивов a будет сканирован в одномерный x по одним из двух способов:

1. Стандартный обход по формуле (6);

2. Обход “змейкой” по формуле

$$x_{jm_{n-s}+k} = a_{j,(j \bmod 2)(m_{n-s}-1)+k(-1)^j}, \tag{11}$$

где $k = \overline{0, m_{n-s}-1}$, $j = \overline{0, m_s - 1}$.

Такой способ позволяет применить полученную ранее теорию на практике. В случае стандартного обхода возможна интерпретация полученного вектора спектральных характеристик как двумерного преобразования Фурье. Пусть P^s, P^{n-s} удовлетворяют условию палиндромности. Из теорем 2, 3 и того, что двумерное преобразование (5) можно рассматривать как два последовательных одномерных, следует, что обнулению должны подвергаться следующие коэффициенты:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{x}_{jm_{n-s}+i}, \\ j = [(p_s - k)/2]m_{s-1}, \ldots, [(p_s + k)/2]m_{s-1} - 1, \\ i = [(p_{n-s} - l)/2]m_{n-s-1}, \ldots, [(p_{n-s} + l)/2]m_{n-s-1} - 1, \end{array}\right\} \tag{12}$$

для некоторых целых $l \in [1, p_{n-s})$ и $k \in [1, p_s)$. Коэффициент сжатия Δ в этом случае равен $\frac{p_s p_{n-s}}{(p_s-k)(p_{n-s}-l)}$. Такое сжатие назовем двумерным, в отличие от того, при котором изображение просто сканируется в одномерный массив без дальнейшего исследования связи его вектора спектральных характеристик и матрицы спектральных характеристик исходного изображения. Последнее мы будем называть одномерным и использовать для него при сканировании обход “змейкой.” Итак, приведем пошаговый алгоритм.

Алгоритм 5 (зонное сжатие изображений)**.** Сжатие изображения может быть выполнено следующим образом:

1. Сканируем двумерный массив в одномерный по формуле (6) или (11).

2. Вычисляем дискретное преобразование Фурье вектора x с помощью БПФ.

3. Обнуляем коэффициенты, соответствующие центральным подпачкам последней пачки в случае обхода (11), или коэффициенты (12) при стандартном обходе.

Для восстановления сжатого изображения применяем быстрое обратное преобразование Фурье к измененному вектору спектральных характеристик и применяем операцию взятия вещественной части. Получили одномерный массив x^*. Конструируем из него по формуле (6) или (11) двумерный массив a^*, который и является восстановленым изображением.

Описанный алгоритм был реализован на языке Java. В качестве порождающей последовательности выбрана $\{7, 5, 7, 7, 5, 7\}$. Входными данными являются изображения размером $m_3 \times m_3 = 245 \times 245$. На рисунках 1–3 приведены результаты экспериментов по восстановлению изображений.

а) б) в)

Рисунок 1 — sunflower.bmp: а) одномерное сжатие , б) двумерное сжатие, в) оригинал

а) б) в)

Рисунок 2 — rose.bmp: а) одномерное сжатие , б) двумерное сжатие, в) оригинал

У всех трех изображений для одномерного сжатия обнулялась целиком последняя пачка, в результате чего сжатие составило $\Delta = p_6 = 7$. Для изображений 1в), 2в) двумерное сжатие осуществлялось обнулением коэффициентов из формулы (12) с $l = 4$, $k = 5$ и сжатием $\Delta = \frac{p_3 * p_3}{(p_3 - l)(p_3 - k)} \approx 8$. Изображение 3в) было сжато обнулением коэффициентов из формулы (12) с $l = 6$, $k = 5$, и Δ составило $\frac{p_3 * p_3}{(p_3 - l)(p_3 - k)} = 24,5$. Очевидно, что двумерное сжатие лучше подходит для изображений, чем одномерное. В первом случае при сжатии 7 раз качество восстановления не является приемлемым, в то время как во втором сжатие происходит в большее число раз, и глаз почти не замечает разницу между восстановленым и исходным изображениями. Числовые характеристики MSE и PSNR подтверждают эти наблюдения, см. таблицу 2. Напомним, что лучшему качеству восстановления соответствует

а) б) в)

Рисунок 3 — lilia.bmp: а) одномерное сжатие , б) двумерное сжатие, в) оригинал

Таблица 2 — Результаты зонного сжатия

Числовые характеристики	sunflower		rose		lilia	
	одн.	двум.	одн.	двум.	одн.	двум.
MSE	32	7	35	10	33	20
PSNR	17	32	17	28	18	22
Δ	7	8	7	8	7	25

меньшая MSE и большая PSNR:

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}|f(x,y)-g(x,y)|^2}{MN}}, \qquad (13)$$

$$PSNR = 10\log_{10}\frac{255^2 MN}{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}|f(x,y)-g(x,y)|^2}, \qquad (14)$$

где $g(x,y)$ и $f(x,y)$ — векторы RGB-компонент исходного и восстановленного изображений. Значения в таблице были округлены до целых.

Был сделан вывод, что двумерное преобразование Фурье при обработке изображения всегда предпочтительнее одномерного после его сканирования. Так как при сжатии изображения 3в) в 24,5 раза разница между результатом восстановления и оригиналом незаметна, двумерное зонное сжатие не уступает формату сжатия JPEG. Время работы на каждом изображении составило 2 секунды, что является приемлемым. С другой стороны, двумерное зонное сжатие не лишено некоторых недостатков. Во-первых, условие (2) не позволяет брать одну и ту же систему для сжатия изображений разных размеров. Во-вторых, для хранения изображения в форме спектральных характеристик требуется бы в 16 раз больше объема, чем в bmp-формате без учета сжатия. Эти недостатки не являются существенными и могут быть устранены после доработки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были исследованы свойства дискретных преобразований по системам ВПФ, удовлетворяющих условию палиндромности. Основными результатами являются теоремы 1–3, доказанные до этого в случае ВКФ. Они являются практически значимыми; было рассмотрено одно из их возможных применений — зонное сжатие изображений.

Ключевым моментом, определяющим возможность применения преобразования Фурье по системам ВПФ на практике, является алгоритм БПФ. Данный алгоритм успешно разработан и реализован автором, см. алгоритм 4. Для оптимизации реализации алгоритма БПФ на языке Java были применены потоки.

Была решена задача оптимального зонного сжатия одномерного сигнала, в алгоритме 5 полученные результаты адаптированы для сжатия изображений. На языке Java был реализован модуль, выполняющий данное преобразование. Результаты его работы на тестовых данных подтверждают, что двумерное преобразование изображения при его обработке предпочтительнее, чем одномерное преобразование вектора, полученного сканированием.

При двумерном зонном сжатии изображений в 8–25 раз глаз почти не в состоянии заметить разницу, что не уступает формату сжатия JPEG. Предложенный способ сжатия не лишен недостатков, которые могут быть устранены после доработки. Таким образом, результаты работы рекомендованы к использованию на практике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс; пер. с англ. Л. И. Рубанова и др. — 3-е изд., исправленное и дополненное. — М.: Техносфера, 2012. — 1104 с.

2 Голд, Б. Цифровая обработка сигналов / Б. Голд, Ч. Рэйдер; под ред. А. М. Трахтмана. — М.: Советское радио, 1973. — 368 с.

3 Залманзон, Л. А. Преобразования Фурье, Уолша и Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л. А. Залманзон. — М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 496 с.

4 Трахтман, А. Н. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. Н. Трахтман, В. А. Трахтман. — М: Советское радио, 1975. — 207 с.

5 Голубов, Б. И. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 344 с.

6 Волосивец, С. С. Обобщенная абсолютная сходимость простых и двойных рядов по мультипликативным системам / С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: ООО Изд-во "Научная книга", 2018. — С. 86–90.

7 Кузнецова, М. А. Обобщенная абсолютная сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам функций обобщенной ограниченной вариации / М. А. Кузнецова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Т. 17, вып. 3. — С. 304–312.

8 Кузнецова, М. А. Свойства дискретных преобразований Фурье по системе мультипликативных функций / М. А. Кузнецова // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы VII Междунар. молодежной науч.-практ. конф. — Саратов: ООО Изд-во "Научная книга", 2018. — С. 90–92.

9 Алгоритмы. Построение и анализ / Т. Х. Кормен и др. — 3-е изд. : Пер. с англ. — М.: ООО "И. Д. Вильямс", 2013. — 1328 с.

10 Лукомский, С. Ф. Быстрые дискретные преобразования Фурье по классическим ортогональным системам : учебное пособие / С. Ф. Лукомский. — Саратов: Б. и., 2013. — 13 с.