МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Никишовой Елизаветы Романовны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Целочисленным (иногда его называют также дискретным) программированием называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение

Целочисленное программирование возникло в 50-60-е годы нашего века из нужд практики - главным образом в работе американского математика Р. Гомори. Первоначально целочисленное программирование развивалось независимо от геометрии чисел на основе теории и методов математической оптимизации, прежде всего линейного программирования. Однако в последние время исследования в этом направлении все чаще проводятся средствами математики целых чисел. Задачи такого типа весьма актуальны, так как к их решению сводится анализ разнообразных ситуаций, возникающих в экономике, технике, военном деле и других областях. С появлением ЭВМ, ростом их производительности повысился интерес к задачам такого типа и к математике в целом.

Актуальность темы. Целочисленное программирование представляет собой одно из активно развивающихся направлений дискретной оптимизации. При рассмотрении целого ряда экономических задач необходимо учитывать требование целочисленности используемых переменных. Методы целочисленного линейного программирования позволяют учесть такие факторы, как неделимость объектов, дискретность процессов, наличие альтернатив, фиксированные доплаты и ряд других.

Объект исследования – задачи целочисленного линейного программирования.

Целью бакалаврской работы является изучение и программная реализация метода Гомори для решения задач целочисленного линейного программировании. В связи с поставленной целью в работе решались следующие **задачи**:

— решение задачи целочисленного линейного программирования, используя симплекс-метод без ограничений на целочисленность решения;

— полученный с помощью симплекс-метода результат обработать, используя метод Гомори;

— создать программный продукт, реализующий метод Гомори на примере поставленной задачи.

Практическая значимость данной работы состоит в том, что разработанный программный продукт можно использовать в дальнейшем для решения других задач целочисленного линейного программирования.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, двух приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность работы, ставятся цели и задачи.

В первом разделе приводятся основные понятия линейного программирования.

Определение 1. *Пусть A - матрица размерности $m \times n$, b - n-мерный вектор, c - m-мерный вектор. Каноническая задача максимизации состоит в отыскании неотрицательного вектора x, который*

$$xc \to \max \tag{1}$$

при условии

$$xA = b. \tag{2}$$

Определение 2. *Пусть $a^1, ..., a^r, \overline{a^1}, ..., \overline{a^s}$ и c - m-мерные векторы, а $\beta_1, ..., \beta_r$, $\overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_s}$ - числа. Общей задачей максимизации называется задача нахождения такого m-мерного вектора x, чтобы*

$$xc \to \max \tag{3}$$

при условиях

$$xa^j = \beta_j,\ j = 1, ..., r, \tag{4}$$
$$x\overline{a^j} = \overline{\beta_j},\ j = 1, ..., s.$$

Далее в разделе приводится описание симплекс-метода для решения задач линейного программирования.

Определение 3. *Пусть $a_1, ..., a_m$ - множество линейно-независимых векторов, $b_1, ..., b_n$ - множество векторов, каждый из которых является линейной комбинацией a_i. Таблицей векторов b_j по отношению к базису a_i называется матрица T, выражающая каждый из векторов b_j в виде линейной комбинации a_i. Она приведена в Таблице 1.*

Таблица 1 – Матрица T

	b_1	...	b_j	...	b_n
a_1	τ_{11}	...	τ_{1_j}	...	τ_{1n}
.	.		.		.
.	.		.		.
.	.		.		.
a_i	τ_{i1}	...	τij	...	τ_{in}
.	.		.		.
.	.		.		.
.	.		.		.
a_m	τ_{m1}	...	τ_{mj}	...	τ_{mn}

Здесь τ_{ij} есть коэффициент при a_i в выражении для b_j, т. е.

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i.$$

Основной вычислительный этап состоит в том, что называется операцией замещения.

Теорема 1 (операция замещения)**.** *Если в таблице T $\tau_{rs} \neq 0$, то векторы $a_1, ..., a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, ..., a_m$ образуют базис, и элементы таблицы T' имеют вид:*

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj},\ \text{при}\ i \neq r,\ j = 1, ..., n, \tag{5}$$

$$\tau'_{rj} = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}},\ \textit{при}\ i = r,\ j = 1, ..., n. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) эквивалентны следующему правилу.

Определение 4 (правило замещения)**.** *Чтобы получить таблицу T' из таблицы T, нужно*

1. *прибавить строку t_r, умноженную на некоторые скалярные множители, к каждой из остальных строк T так, чтобы получить нули в s-м столбце, после чего*
2. *разделить t_r на τ_{rs}.*

Рассмотрим снова каноническую задачу минимизации: найти такое $y \geqq 0$, что

$$yb \to \min \qquad (7)$$

при условии, что

$$Ay = c. \qquad (8)$$

Процедура симплекс-метода состоит в получении с помощью операций замещения последовательности допустимых векторов до тех пор, пока не будет найден оптимальный вектор. Данный метод дает критерий для определения последовательности замещений, при которой оптимальный вектор достигается наиболее эффективным образом:

(а) Пусть ζ_j - скалярное произведение j-го столбца на вектор стоимостей $\beta_1, ..., \beta_m$. Если для некоторого j, $\beta_j < \zeta_j$, то введем a^j в новый базис.

(б) Решив ввести в новый базис вектор a^s, подсчитаем отношения η_i/τ_{is} для $\tau_{is} > 0$ и заменим тот вектор a^r старого базиса, для которого это отношение минимально.

Теорема 2 (критерий оптимальности)**.** *Пусть $\zeta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \tau_{ij}$. Тогда допустимый вектор y оптимален, если*

$$\zeta_j \leqq \beta_j \qquad (9)$$

при всех $j = 1, ..., n$.

Если ни одно из чисел τ_{is} не положительно, то воспользуемся следующим результатом.

Лемма 1. *Если при попытке применить (б) окажется, что ни одно из чисел τ_{is} не является положительным ($i = 1, ..., p$), то первоначальная задача не имеет минимума.*

Считая, что ранг матрицы A равен p потребуем, чтобы выполнялось условие невырожденности: невозможно выразить вектор c в виде линейной комбинации меньшего, чем p, числа столбов матрицы A.

Основной результат, необходимый для доказательства сходимости процесса симплекс-метода, следующий.

Теорема 3 (процесс улучшения)**.** *Если при выполнении условия невырожденности произвести замещение в соответствии с правилами (а) и (б), то вновь полученный базис будет снова допустимым, а соответствующее значение ζ_0' линейной формы, подлежащей минимизации, будет меньше, чем прежнее значение ζ_0.*

Полученный результат говорит о том, что после конечного числа шагов мы достигнем желаемого минимума. В самом деле, величина ζ_0 при каждом замещении убывает. Следовательно, мы не можем получить один и тот же базис более одного раза и должны поэтому, в конце концов, достичь оптимального базиса.

Во втором разделе мы рассматриваем каноническую задачу максимизации с дополнительным требованием целочисленности переменных:

$$\max \langle c, x \rangle , \tag{10}$$

$$Ax = b, \tag{11}$$

$$x \geq 0, \tag{12}$$

x – целочисленный вектор.

Определение 5. *Пусть x^* – оптимальный план задачи* (10), (11)*, не являющийся целочисленным. Неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \leq \gamma_0,$$

или

$$\langle \gamma, x \rangle \leq \gamma_0, \tag{13}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$, *называется правильным отсечением, если оно удовлетворяет требованиям: (а) для вектора* x^* *неравенство* (13) *не выполняется, т. е.* $\langle \gamma, x^* \rangle \ > \gamma_0$ *(условие отсечения); (б) если* x *– целочисленный план задачи* (10), (11) *(т. е. план задачи* (10) - (12)*), то* x *удовлетворяет* (13) *(условие правильности).*

Далее описывается способ построения правильного отсечения, предложенный Р. Гомори. Для произвольного вещественного числа α через $[\alpha]$ будем обозначать его целую часть, т.е. $[\alpha]$ есть наибольшее целое число k, не превосходящее α. Дробной частью $\{\alpha\}$ числа α называется число $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Обозначим задачу (10), (11) через $\mathscr{L}_0$. На первом этапе находим лексикографический максимум задачи $\mathscr{L}_0$. Будем обозначать через

$$x(0) = (x_0(0), x_1(0), ..., x_n(0))$$

$(n+1)$-мерный вектор такой, что $(x_0(0), x_1(0), ..., x_n(0))$ – решение лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$, а $x_0(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(0)$ – значение линейной формы. Вектор $x(0)$ является опорным планом, он же является строго допустимым псевдопланом. Если $x(0)$ - целочисленный вектор, то является решением задачи (10) – (12).

В противном случае отыскивается минимальный индекс s, $0 \leq s \leq n$, для которого величина $x(0)$ не является целой. Пусть $\Re(0)$ – симплексная таблица в координатной форме, соответствующая вектору $x(0)$. С помощью коэффициентов s-й строки этой таблицы строится правильное отсечение.

Вводится вспомогательная переменная x_{n+1} и рассматривается новая задача $\mathscr{L}_1$:

$$\max \langle c, x \rangle \,,$$

$$Ax = b, \tag{14}$$

$$\sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j - x_{n+1} = \{\alpha_{s0}\}, \tag{15}$$

$$x \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0. \tag{16}$$

Следующий этап состоит в нахождении лексикографического максимума задачи $\mathscr{L}_1$. Начальный строго допустимый псевдоплан для для применения двойственного симплекс-метода к задаче $\mathscr{L}_1$:

$$y(1) = (x_0(0), x_1(0), ..., x_p(0), x_{n+1}(0)),$$

где

$$x_{n+1}(0) = \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} x_j(0) - \{\alpha_{s0}\} = -\{\alpha_{s0}\}.$$

Далее строим симплекс-таблицу, соответствующую указанному базису вектора $y(1)$, для этого нужно приписать снизу к таблице $\Re(0)$ строку

$$(-\{\alpha_{s0}\}, -\{\alpha_{sj_1}\}, ..., -\{\alpha_{sj_{n-m}}\}),$$

где $\omega = \{j_1, j_2, ..., j_{n-m}\}$ – список номеров небазисных переменных, соответствующих таблице $\Re(0)$ опорного плана $x(0)$. Поскольку $x(0)$ – строго допустимый псевдоплан, то всякий столбец β_j, $j \in \omega$, таблицы $\Re(0)$ лексикографически положителен: $\beta_j \succ 0$, $j \in \omega$. Отсюда вытекает, что и в симплексной таблице в координатной форме, отвечающей опорному вектору $y(1)$, всякий столбец (кроме первого, совпадающего с $y(1)$) лексикографически положителен:

$$\begin{pmatrix} \beta^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{pmatrix} \succ 0,\ j \in \omega.$$

Таким образом, имея в своем распоряжении решение $x(0)$ лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$ и соответствующую симплекс-таблицу в координатной форме $\Re(0)$, без каких-либо дополнительных вычислений находим начальный строго допустимый псевдоплан $y(1)$ для задачи $\mathscr{L}_1$ и строим соответствующую ему симплексную таблицу в координатной форме.

Может случиться, что лексикографическая задача $\mathscr{L}_1$ не имеет решения. В этом случае решение целочисленной задачи (10)–(12) следует прекратить, поскольку имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если в задаче $\mathscr{L}_1$ не существует лексикографического макси-*

мума, то множество $\tilde{X}$ целочисленных точек задачи (10)–(12) *пусто.*

Пусть $x(1) = (x_0(1), x_1(1), ..., x_n(1), x_{n+1}(1))$ – решение лексикографической задачи $\mathscr{L}_1$. Отправляясь от задачи $\mathscr{L}_1$ и вектора $x(1)$, аналогичным образом строятся задачи $\mathscr{L}_r, r = 2, 3, ...$, и решения $x(r) \in \mathbb{R}^{n+1+r}$ соответствующих им лексикографических задач.

Если на каком-то шаге r вектор

$$x(r) = (x_0(r), x_1(r), ..., x_n(r), ..., x_{n+r}(r))$$

оказывается целочисленным, то вектор $(x_0(r), x_1(r), ..., x_n(r))$ является решением задачи (10)–(12).

В третьем разделе приводится решение следующей целочисленной задачи оптимизация размещения побочного производства лесничества.

Лесничество имеет 24 га свободной земли под паром и заинтересовано извлечь из нее доход. Оно может выращивать саженцы быстрорастущего гибрида новогодней ели, которые достигают спелости за один год, или бычков, отведя часть земли под пастбище. Деревья выращиваются и продаются в партиях по 1000 штук. Требуется 1,5 га для выращивания одной партии деревьев и 4 га для вскармливания одного бычка. Лесничество может потратить только 200 ч. в год на свое побочное производство. Практика показывает, что требуется 20 ч. для культивации, подрезания, вырубки и пакетирования одной партии деревьев. Для ухода за одним бычком также требуется 20 ч. Лесничество имеет возможность израсходовать на эти цели 6 тыс. руб. Годовые издержки на одну партию деревьев выливаются в 150 руб. и 1,2 тыс. руб. на одного бычка. Уже заключен контракт на поставку 2 бычков. По сложившимся ценам, одна новогодняя ель принесет чистый доход в 2,5 руб., один бычок - 5 тыс. руб.

Постановка задачи:

1. В качестве *показателя эффективности* целесообразно взять доход за операцию (годовой чистый доход с земли в рублях).
2. В качестве управляемых *переменных* задачи следует взять:
   — x_1 – количество откармливаемых бычков в год;
   — x_2 – количество выращиваемых партий быстрорастущих новогод-

них елей по 1000 шт. в каждой в год.

3. *Целевая функция*:

$$5000x_1 + 2500x_2 \to max,$$

4. *Ограничения*:

— По использованию земли, га:

$$4x_1 + 1,5x_2 \leq 24,$$

— По бюджету, руб.:

$$1200x_1 + 150x_2 \leq 6000,$$

— По трудовым ресурсам, ч.:

$$20x_1 + 20x_2 \leq 200,$$

— Обязательства по контракту, шт.:

$$x_1 \geq 2,$$

— Областные ограничения:

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Для решения данной задачи на языке C# была написана программа, которая вычисляет оптимальный план с помощью симплекс-метода, и, если он не удовлетворяет условию целочисленности, обрабатывает полученный результат при помощи метода Гомори.

Входными даннными программы являются:

— целевая функция;

— ограничения задачи.

Выходными даннными программы являются следующие:

— симплекс таблица;

— оптимальные значения переменных;

— максимальное значение целевой функции при условии целочисленности переменных.

Результаты работы данной программы после использования симплекс-метода и метода Гомори представлены в Таблице 2 и Таблице 3 соответственно.

Таблица 2 – Результат работы симплекс-метода

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	1.6	0	0	0.4	0	-0.03	1
x_4	720	0	0	-420	1	24	0
x_2	6.4	0	1	-0.4	0	0.08	0
x_1	3.6	1	0	0.4	0	-0.03	0
Fmax	34000	0	0	1000	0	50	0

Таблица 3 – Результат работы метода Гомори

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_6	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1.67	-1
x_4	450	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1550	900
x_2	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	2
x_1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.67	-1
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	26.67	-20
x_7	19	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	25	-19
x_8	18	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23.33	-18
x_9	17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	21.67	-17
x_{10}	14.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	18.83	-15
x_{11}	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5	-4
x_3	0.5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.17	1
x_{12}	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.83	-1
Fmax	32500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	833.33	0

В заключении приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, необходимые для описания задач линейного программирования, изучен симплекс-метод для решения оптимизационной задачи линейного программирования.
2. Определены основные понятия целочисленного линейного программирования, изучен метод Гомори для нахождения целочисленного решения в задачах линейного программирования.

3. Решена задача целочисленного линейного программирования, используя симплекс-метод без ограничений на целочисленность решения, затем полученный результат был обработан, используя метод Гомори.
4. Создан программный продукт, реализующий метод Гомори на примере поставленной задачи.