МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ПРИЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР В ЭКОНОМИКЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Костиной Алины Александровны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Зачастую человек осуществляя какую-либо деятельность, сталкивается с проблемой принятия решения в условиях множества факторов, влияющих на само решение. Эффективней всего в подобных случаях пользоваться матричными играми, которые помогают упростить сложившуюся ситуацию и полностью оценить важность каждого фактора. То есть можно заключить, что математическая теория игр является составной частью исследования операций. Она применяется в различных областях человеческой деятельности, таких как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т.д.

Целью бакалаврской работы является:

1. Изучение теоретических положений по конечным и бесконечным антагонистическим играм.
2. Решение и создание программного кода задачи.

Объект исследования - конечные и бесконечные антагонистические игры.

Предмет исследования - значение игры, оптимальные стратегии игроков и математическое ожидание выигрыша игрока.

Для достижения целей поставленных в работе необходимо решить следующие **задачи:**

1. Изучить теоретический материал.
2. Отобрать задачу для практической реализации.
3. Разработать алгоритмы решения задачи.
4. Программно реализовать отобранную задачу на языке C++.

Практическая значимость проводимого исследования состоит, к примеру, в том, что на основании решенной задачи можно сделать выводы (при известных количествах рынков сбыта и денежных средств обеих сторон) о том: сколько денежных средств распределяется на защиту конкретного рынка сбыта и с какой вероятностью другая сторона выделяет денежные средства для захвата этих рынков.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель бакалаврской работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость исследования.

В первой главе рассматриваем вводную информацию, а именно основные понятия теории игр.

Теория игр – это раздел математики, в котором исследуются и вырабатываются оптимальные правила (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной ситуации.

Идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц, интересы которых различны, что и порождает конфликтную ситуацию называется игрой. А сами лица называются игроками.

В теории игр существуют два направления:

1. Теория кооперативных игр.
2. Теория некооперативных игр.

Если имеются двое игроков, интересы которых являются противоположными, то такая игра называется антагонистической.

Во второй главе приводим в рассмотрение теорию матричных игр.

Антагонистическая игра G описывается двумя множествами X и Y и вещественной функцией F, определённой на парах (x, y), где $x \in X,\ y \in Y$.

Элементы x, y множеств X и Y являются стратегиями игроков, участвовавших в игре G. Функцией выигрыша является функция F, а её значение это выигрыш.

Значение $F(x, y)$ это величина, которую второй игрок платит первому, если первый игрок выбирает стратегию x, а второй выбирает y.

Антагонистическая игра - это парная игра с нулевой суммой. Игра называется игрой с нулевой суммой, в том случае, если любая возможная партия некоторой игры имеет нулевую сумму выигрышей $f_i, i = [1, N]$ всех N игроков ($\sum\limits_{i=1}^{N} f_i = 0$).

Зафиксируем игру G с множествами стратегий X и Y и функцией выигрыша F.

Если множества X и Y конечны, то выигрыш F можно представить в виде матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} & \cdots & a_{mj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

И такие игры называются матричными играми.

Докажем теорему, которая является важной хоть и простой в теории игр.

Теорема 1. *Игра G имеет не более одного значения.*

Доказательство. Пусть (x_1, y_1, f_1) и (x_2, y_2, f_2) являются решениями игры G. Тогда

$$f_1 = F(x_1, y_1) \geqq F(x_2, y_1) \geqq F(x_2, y_2) = f_2 \geqq F(x_1, y_2) \geqq F(x_1, y_1) = f_1.$$

И, как очевидно, отсюда следует, что $f_1 = f_2$.

$\square$

Пусть G - игра $(X, Y; F)$. Смешанной стратегией s первого игрока называется вещественная функция на S, такая что

$$s(x) \geqq 0,$$

$s(x) = 0$ для всех, кроме конечного числа $x \in X$,

$$\sum_{x \in X} s(x) = 1.$$

Число $s(x)$ является вероятностью, с которой первый игрок выбирает x. Чтобы отличать первоначальные стратегии x и y от смешанных s и t, будем называть их чистыми стратегиями. Однако, на самом деле, чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, для которого $s(x) = 1$, и $s(x_1) = 0$ при $x_1 \neq x$.

Пусть X и Y - произвольные множества. Вещественная функция F двух переменных $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$ имеет седловую точку (x^0, y^0), если

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y \quad F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y).$$

Совокупность $G = (X, Y, F(x, y))$ задаёт антагонистическую игру. Антагонистическая игра G имеет решение, если функция $F(x, y)$ имеет седловую точку. Пусть (x^0, y^0) - седловая точка функции $F(x, y)$. Тройка: $x^0, y^0, F(x^0, y^0)$ является решением игры, а сами x^0, y^0 называются оптимальными стратегиями игроков и $F(x^0, y^0)$ - это значение игры.

Лемма 1. *Если (x^0, y^0), (x^*, y^*) - две седловые точки функции $F(x, y)$, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.*

Дадим определения минимакса и максиминимума:

Пусть F - функция x и y. Положим

$$F_M(y) = \max_{x \in X} F(x, y),$$

$$F_m(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$$

и

$$mini \max F = \min_{y \in Y} F_M(y),$$

$$maxi \min F = \max_{x \in X} F_m(x).$$

Понятия седловой точки, минимакса и максимина связаны следующим образом:

Теорема 2. *Если F - функция, для которой существует как минимакс, так и максимин, то*

$$maxi \min F \leq mini \max F,$$

и равенство имеет место в том и только в том случае, когда у F есть седловая точка.

В третьей главе вводим теорию симметричных игр.

Игра $G = (X, Y; F)$ называется симметричной, если $X = Y$ и $F(x, y) = -F(y, x)$ при всех x, y. И отсюда следует, что $F(x, x) = 0$ при любых x.

Лемма 2. *Симметричная игра G имеет решение в том и только в том случае, если существует такое $\bar{x} \in X$, что $F(\bar{x}, x) \geqq 0$ при всех $x \in X$.*

Пусть $G = (X, Y; F)$ - произвольная игра. Её симметризацией называется игра $\bar{G}$, стратегии которой состоят из всех пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$, а выигрыш определяется так:

$$\bar{F}[(x, y), (x^1, y^1)] = F(x, y^1) - F(x^1, y).$$

Значение оптимальной стратегии для игры $\bar{G}$ равносильно информации относительно обоих игроков в исходной игре G. Из этого вытекает теорема.

Теорема 3. *Игра G имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение игра $\bar{G}$.*

Аналогичные рассуждения справедливы и для смешанных стратегий. Следовательно, вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Игра G имеет решение в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда такое решение имеет её симметризация $\bar{G}$.*

В четвертой главе приводится доказательство основной теоремы матричных игр и вспомогательных теорем.

Теорема 5. *Каждая симметричная матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что имеется такая смешанная стратегия $\bar{x}$, что $\bar{x}A \geqq 0$. Если такой стратегии $\bar{x}$ нет, то неравенство

$$xA \geqslant 0$$

не имеет полуположительных решений. Но тогда, согласно теореме (Полуположительные решения однородных неравенств) - существует такой неотрицательный вектор y , что $Ay < 0$. Так как $y \neq 0$, этот вектор в действительности должен быть полуположительным. Но тогда из $xA = -Ax$ получаем, что $yA > 0$, а это противоречит предположению об отсутствии у $xA \geqslant 0$ полуположительных решений.

$\square$

В пятой главе, переходим к рассмотрению теории бесконечных игр.

Часто в конфликтных ситуациях стороны, преследующие прямо противоположные цели, выбирают значения некоторых непрерывно изменяющихся параметров. Обычно в этом случае множество допустимых для выбора значений параметра является бесконечным, и поэтому теоретико-игровые модели таких конфликтов называются бесконечными антагонистическими играми.

Бесконечная антагонистическая игра, так же как и конечная, задается тройкой $G = (x, y; F)$, где x - множество чистых стратегий первого игрока, $y-$ множество чистых стратегий второго игрока, F - функция выигрыша.

Единственное отличие бесконечных антагонистических игр от конечных состоит в том, что в бесконечной игре хотя бы один из игроков имеет бесконечное множество чистых стратегий (если же хотя бы один игрок имеет конечное число стратегий, то исследование игры существенно упрощается). Поэтому в этих играх игроки могут следовать тем же принципам оптимальности. Однако эти принципы здесь реализуются уже не всегда. Первая трудность заключается в конструировании смешанного расширения игры.

Реальный конфликт может моделироваться бесконечной антагонистической игрой, если он отвечает следующим условиям.

1. Конфликт определяется антагонистическим взаимодействием двух сторон, из которых хотя бы одна или обе располагает бесконечным числом возможных действий.

2. Свои действия стороны предпринимают независимо друг от друга, т.е. каждая из них не располагает никакой информацией о действии, совершаемом другой стороной результат этих действий оценивается вещественным числом, которое определяет полезность сложившейся ситуации для одной из сторон.

3. Каждая из конфликтующих сторон знает как для себя, так и для противника полезность возможной ситуации, получаемой в результате их взаимодействия.

4. Действия конфликтующих сторон в силу своей природы являются нерасчлененными и однократными, т.е. структура каждого из них не имеет каких-либо отличительных свойств. Это позволяет интерпретировать действия сторон как элементы некоторых абстрактных множеств, отличая различные действия друг от друга лишь по степени полезности сложившейся ситуации.

Если конфликт удовлетворяет перечисленным условиям, то назвав одну из сторон первым игроком, а другую - вторым игроком, придем к бесконечной антагонистической игре $G = (x, y; F)$, где x - множество возможных действий первого игрока, y - множество возможных действий второго игрока, F - функция полезности первого игрока, которая определена на всех парах возможных действий игроков. Условия 1 - 4 дают возможность построить модель конфликта - бесконечную игру G.

И **в шестой главе**, даем постановку задачи, определяем её алгоритм решения и решаем на конкретных значениях.

Пусть одна из фирм (второй игрок) имеет n рынков сбыта, а другая (первый игрок) желает их захватить. На эту цель она может выделить капитал в размере A. Второй игрок для защиты своих рынков сбыта также располагает некоторой суммой B. Не ограничивая общности, считаем, что $B = 1$. Стратегиями первого игрока в этой ситуации являются всевозможные распределения суммы A между рынками сбыта. Если для захвата рынка i он выделяет сумму x_i, а второй игрок для защиты этого рынка выделяет сумму y_i, то первый игрок на этом рынке выигрывает $k_i(a_i x_i - y_i)$, если $a_i x_i - y_i \geqslant 0$, и ничего не выигрывает в противном случае. Коэффициент k_i определяет степень важности рынка, а коэффициент a_i - степень сопротивления рынка i фирме, проводящей экспансионистскую политику.

Покажем теперь построение и решение игры G, моделирующей борьбу за рынки сбыта, приняв следующие гипотетические данные.

Пусть одна фирма (второй игрок) имеет три рынка сбыта и располагает для их защиты от другой фирмы (первый игрок) суммой денег, равной

300 000 долларов. В свою очередь первый игрок для захвата этих рынков выделил сумму денег, равную 600 000 долларов. Примем $A = 2$ и $B = 1$, а характеризацию рынков зададим табл. 1.

Таблица 1 – Значение коэффициентов a_i и k_i

Рынок i	1	2	3
a_i	1	0,6	0,4
k_i	2	4	1

Перебирая все подмножества $(1, 2, 3)$, найдем, что максимум в формуле

$$v = \max_S \frac{A\sum_{i\in S}(a_i - 1)}{\sum_{i\in S}\dfrac{1}{k_i}} = \frac{A\sum_{i\in S_0}(a_i - 1)}{\sum_{i\in S_0}\dfrac{1}{k_i}}$$

достигается на множестве $S_0 = \{1, 2\}$, $v = 44/15$. Затем, используя равенства

$$y_i^* = -\frac{A\sum_{i\in S_0}(a_i - 1)}{\sum_{i\in S_0}\dfrac{1}{k_i}}\frac{1}{k_i} + a_i A,$$

получим $y_1^* = 8/15, y_2^* = 7/15$. Компоненты оптимальной стратегии первого игрока вычисляются по формуле

$$\xi_i^* = \frac{1}{k_i}\left(\sum_{j\in S_0}\frac{1}{k_j}\right)^{-1},$$

т.е. $\xi_1^* = 2/3, \xi_2^* = 1/3$.

Таким образом, одна фирма распределяет денежные средства для защиты только первого и второго рынков, выделяя соответственно 160 000 и 140 000 долларов, а другая фирма с вероятностями 2/3 и 1/3 выделяет 600 000 долларов соответственно для захвата первого и второго рынков. Математическое ожидание выигрыша второй фирмы будет равно 880 000 долларам.

Предположим теперь, что $a_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, т.е. рынки не оказывают сопротивления. Тогда $l = 2$, $v = 4$, $y_1^* = 0, y_2^* = 1, \xi_1^* = 2/3, \xi_2^* = 1/3$. Следовательно одна фирма все средства выделяет на защиту второго рынка, а другая фирма с вероятностями 2/3 и 1/3 направляет свои средства соответственно для захвата первого и второго рынков. Математическое ожидание выигрыша в этом случае будет равно 1 200 000 долларам. Подсчеты такой задачи описаны с помощью программного продукта на C++.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория конечных и бесконечных антагонистических игр – математический метод изучения оптимальной стратегии в играх. Но именно теория матричных игр позволяет нам рассматривать и с легкостью решать задачи принятия решений в ситуациях с несколькими участниками, когда значение целевой функции для каждого зависит также от решений принимаемых остальными участниками. Поэтому важную роль в матричных играх отводится конфликтам и совместным действиям.

Но не только теория матричных, но и бесконечных игр широко нашла свое применение для анализа проблем микроэкономики, а также и в других сферах, а именно менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т.д..

В процессе написания моей бакалаврской работы были реализованы следующие задачи:

1. Изучены основные теоретические положения в рамках исследуемой темы.
2. Отобрана задача для практической реализации, а именно "захват рынков сбыта".
3. Составлены к ней алгоритмы решения.
4. Разработан программный продукт на C++, который реализует решение этой задачи.

Следовательно, поставленную цель можно считать достигнутой, а задачи выполненными.